TEMA 2: LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVACIÓN EN UNA VARIABLE Y APLICACIONES DE LA DERIVADA

FMIBII – Curso 2016/2017

Biomedical engineering degree

Cristina Sánchez López de Pablo
Universidad San Pablo CEU
Madrid

TEMA 2: LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVACIÓN EN UNA VARIABLE Y APLICACIONES DE LA DERIVADA

TEMA 2: LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVACIÓN EN UNA VARIABLE Y APLICACIONES DE LA DERIVADA

4. **Continuidad y límites laterales o unilaterales**
   - Continuidad en un punto y en un intervalo abierto
   - Límites laterales y continuidad en un intervalo cerrado
   - Propiedades de la continuidad
   - Teorema del valor intermedio
5. **Límites infinitos**
   - Introducción a los límites infinitos
   - Asíntotas verticales
6. **La derivada**
   - La derivada y el problema de la recta tangente
   - Derivada de una función
   - Derivabilidad y continuidad

Índice de contenidos III

TEMA 2: LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVACIÓN EN UNA VARIABLE Y APLICACIONES DE LA DERIVADA

7. **Reglas básicas de derivación y razón de cambio**
   - La regla de la constante
   - La regla de la potencia
   - Las reglas de suma y diferencia
   - La regla del múltiplo constante
   - Derivadas de las funciones seno y coseno
   - Razón de cambio
8. **Reglas del producto, del cociente y derivadas de orden superior**
   - La regla del producto
   - La regla del cociente
   - Derivadas de las funciones trigonométricas
   - Derivadas de orden superior

Índice de contenidos IV

TEMA 2: LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVACIÓN EN UNA VARIABLE Y APLICACIONES DE LA DERIVADA

TEMA 2: LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVACIÓN EN UNA VARIABLE Y APLICACIONES DE LA DERIVADA

TEMA 2: LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVACIÓN EN UNA VARIABLE Y APLICACIONES DE LA DERIVADA

TEMA 2: LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVACIÓN EN UNA VARIABLE Y APLICACIONES DE LA DERIVADA

18. **Límites al infinito**
    - Límites en el infinito
    - Asíntotas horizontales
    - Límites infinitos al infinito
19. **Análisis de gráficas**
20. **Problemas de optimización**
21. **Diferenciales**
    - Aproximaciones por recta tangente
    - Definición de diferenciales
    - Propagación del error
    - Cálculo de diferenciales

El cálculo es…

- **La matemática de los cambios:** velocidades y aceleraciones

- **El desarrollo de modelos** que permite entender situaciones de la vida real → **conceptos:** rectas tangentes, pendientes, áreas, volúmenes, curvaturas…

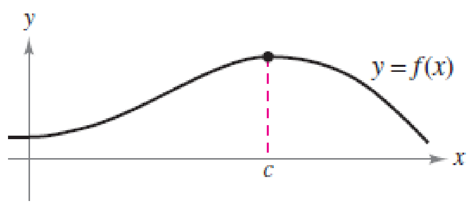
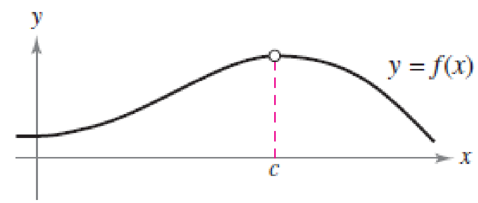
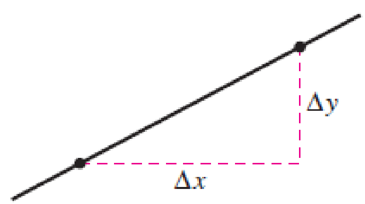
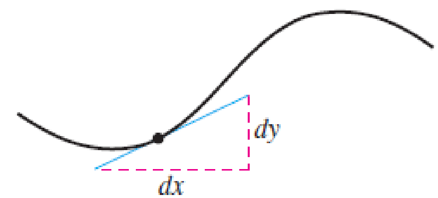
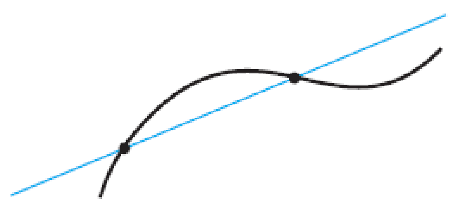
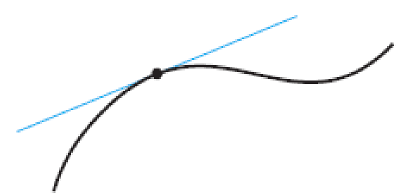
Estrategia:

Pasar de las matemáticas previas al cálculo (estáticas) **al cálculo** (dinámico) → **reformulación** a través de un **proceso de límite**

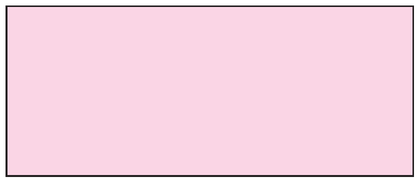
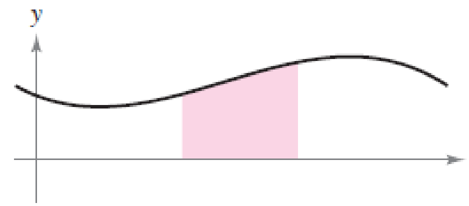
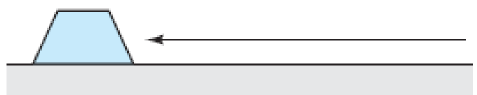
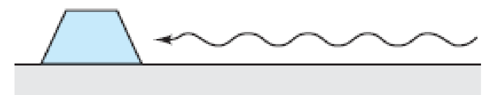
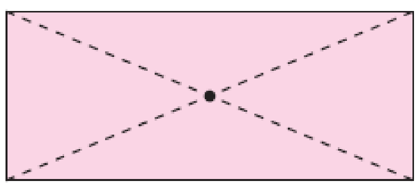
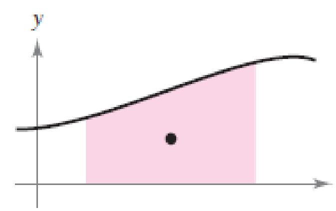
Matemáticas previas al cálculo → Proceso de límite → Cálculo

Una mirada previa al cálculo:
¿Qué es el cálculo? II

Ejemplo: ¿qué podemos hacer con cálculo diferencial?

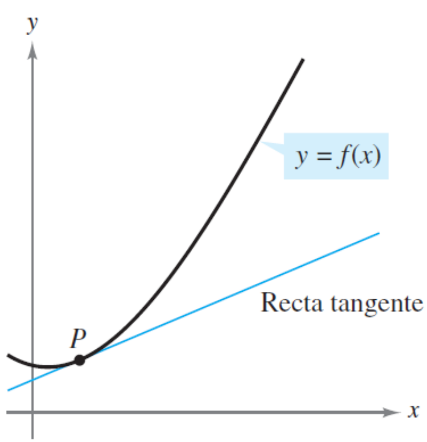
Sin cálculo		Con cálculo diferencial	
Valor de $f(x)$ cuando $x = c$		Límite de $f(x)$ cuando x tiende a c	
Pendiente de una recta		Pendiente de una curva	
Recta secante a una curva		Recta tangente a una curva	

Ejemplo: ¿qué podemos hacer con cálculo integral?

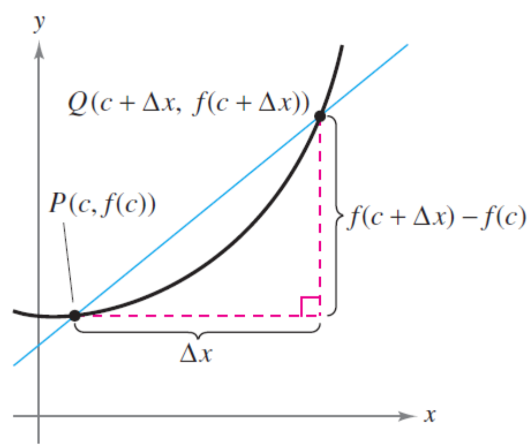
Sin cálculo		Con cálculo integral	
Área de un rectángulo		Área bajo una curva	
Trabajo realizado por una fuerza constante		Trabajo realizado por una fuerza variable	
Centro de un rectángulo		Centroide de una región	

A partir de una función *f* y de un punto *P* de su gráfica, encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto *P*

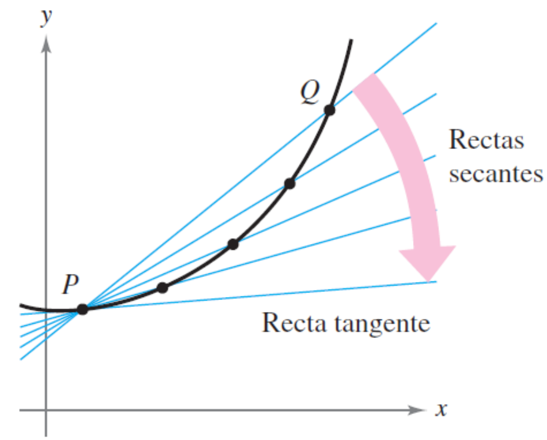
- Calcular la **pendiente de una recta secante** que **pase por P y por otro punto Q** de la curva
- Si **Q tiende a P**, la pendiente de la recta secante de aproxima a la de la tangente → **la pendiente de la recta tangente es el límite de la pendiente de la recta secante**



Recta tangente de la gráfica de f en P



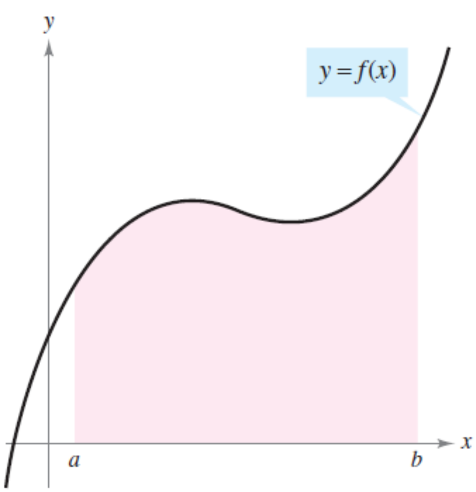
***a*)** La recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$



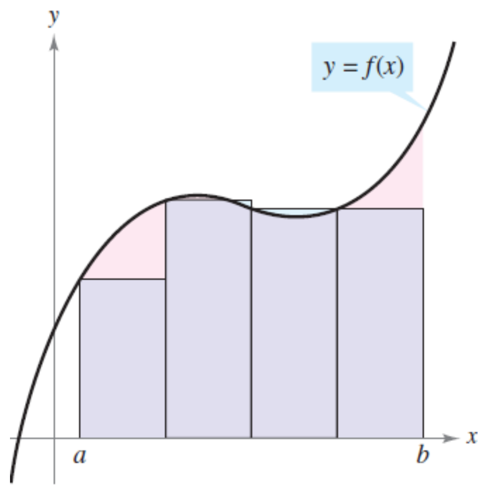
***b*)** Cuando Q tiende a P, las rectas secantes se aproximan a la recta tangente

Determinar el área de una región plana delimitada por gráficas de funciones

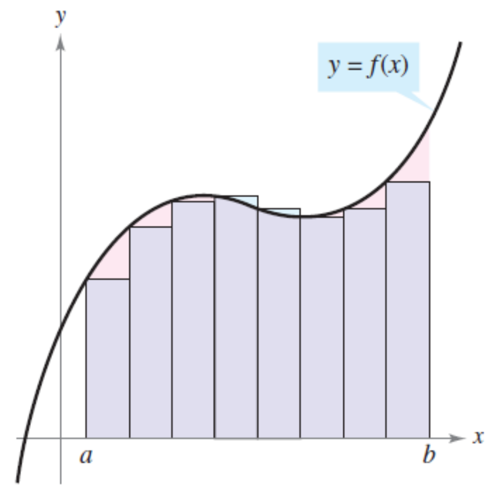
- **Estimar el área bajo la curva** utilizando varios r**ectángulos**
- **La aproximación mejora al aumentar el número de rectángulos**
- El **área de la región** puede calcularse entonces como el **límite de la suma de las áreas de los rectángulos** cuando **el número de éstos crece sin fin**



Área bajo una curva



Aproximación usando cuatro rectángulos



Aproximación usando ocho rectángulos

Descripción "informal" de límite:

Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a c por cualquiera de los dos lados, entonces:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

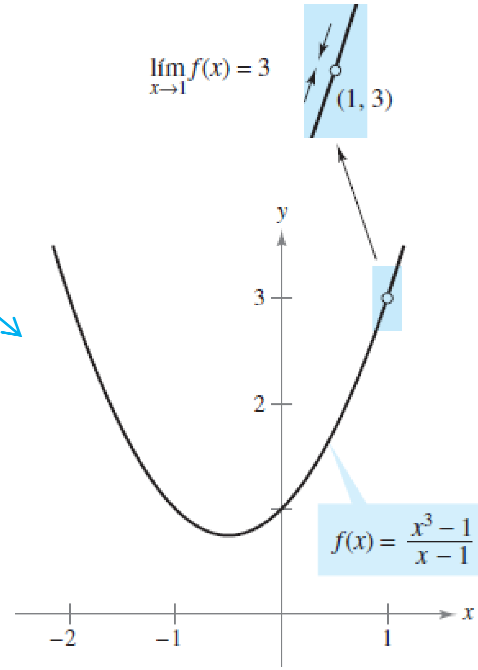
Ejemplo: estimación del límite de una función de manera gráfica y numérica

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

x se aproxima a 1 por la izquierda. → ← x se aproxima a 1 por la derecha.

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

$f(x)$ se aproxima a 3. → ← $f(x)$ se aproxima a 3.



El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 3

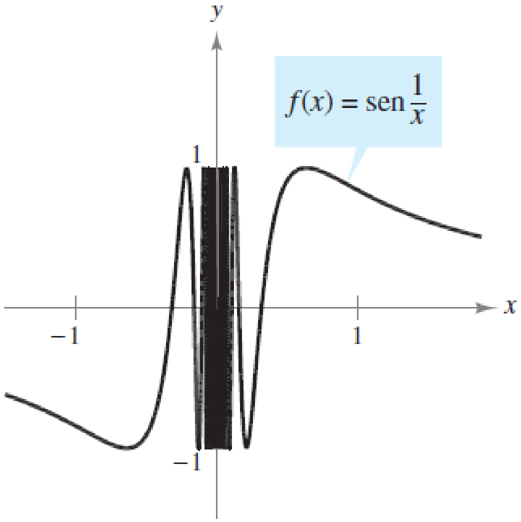
¿Cuándo decimos que un límite no existe?

COMPORTAMIENTOS ASOCIADOS A LA NO EXISTENCIA DE UN LÍMITE

1. $f(x)$ se aproxima a números diferentes por la derecha de c que por la izquierda.
2. $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite a medida que x se aproxima a c.
3. $f(x)$ oscila entre dos valores fijos a medida que x se aproxima a c.

Ejemplo: Analizar la existencia del límite $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

x	$2/\pi$	$2/3\pi$	$2/5\pi$	$2/7\pi$	$2/9\pi$	$2/11\pi$	$x \to 0$
sen $(1/x)$	1	-1	1	-1	1	-1	El límite no existe.



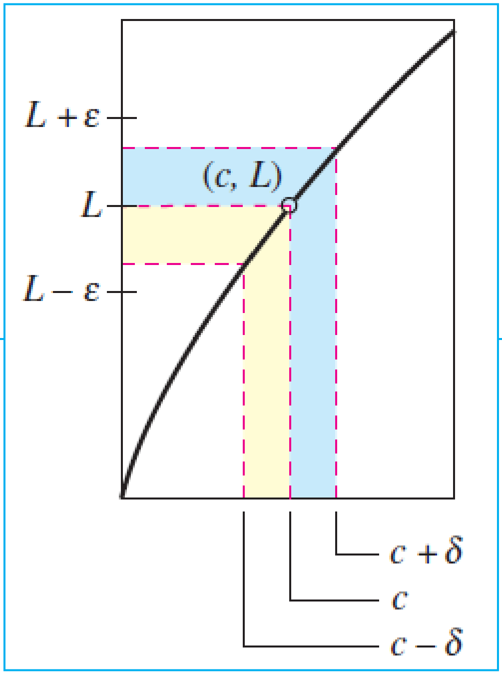
DEFINICIÓN DE LÍMITE

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (salvo posiblemente en c) y L un número real. La afirmación

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$



NOTA:

Algunas funciones carecen de límite cuando $x \to c$, pero las que lo poseen no pueden tener dos límites diferentes

Si el límite de una función existe, entonces es único

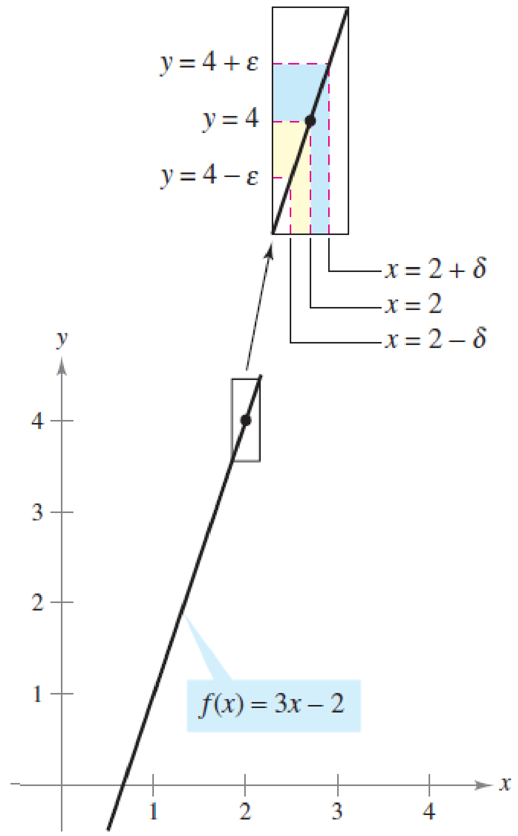
Ejemplo:

Utilizar la definición formal de límite para demostrar que:

$$\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$$

Solución:

- Probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|(3x-2)-4| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x-2| < \delta$
- Puesto que la elección de δ depende de ε es necesario establecer una relación entre los valores absolutos $|(3x-2)-4|$ y $|x-2|$
- $|(3x-2)-4| = |3x-6| = 3|x-2|$
- Si $\delta = \varepsilon/3$ entonces $0 < |x-2| < \delta = \varepsilon/3$, lo que implica que $|(3x-2)-4| = 3|x-2| < 3(\varepsilon/3) = \varepsilon$



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2 es 4

ALGUNOS LÍMITES BÁSICOS

Si b y c son números reales y n un entero positivo:

1. $\lim_{x \to c} b = b$ **2.** $\lim_{x \to c} x = c$ **3.** $\lim_{x \to c} x^n = c^n$

Demostración de la propiedad 2:

- Para todo todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|x - c| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$
- **Si elegimos $\delta = \varepsilon$**, entonces **la segunda desigualdad lleva implícita la primera**, por lo que queda demostrada la propiedad

NOTA: En las funciones que son continuas en c, se puede evaluar el límite por sustitución directa

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

CEU Universidad San Pablo

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Si b y c son números reales y n un entero positivo, f y g son funciones con los límites siguientes:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = K$$

1. Múltiplo escalar: $\lim_{x \to c} [b\, f(x)] = bL$
2. Suma o diferencia: $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. Producto: $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = LK$
4. Cociente: $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$, siempre que $K \neq 0$
5. Potencias: $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

Ejemplo: Límite de un polinomio

$$\lim_{x\to 2}(4x^2+3) = \lim_{x\to 2} 4x^2 + \lim_{x\to 2} 3 \qquad \text{Propiedad 2.}$$

$$= 4\left(\lim_{x\to 2} x^2\right) + \lim_{x\to 2} 3 \qquad \text{Propiedad 1.}$$

$$= 4(2^2) + 3$$

$$= 19$$

Se observa que el **límite de la función polinomial** es simplemente el **valor de dicha función en x =2**

Esta ***propiedad de sustitución directa*** es **válida** para todas las **funciones polinomiales y racionales** cuyos **denominadores no se anulen** en el punto considerado

LÍMITES DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

Si p es una función polinomial y c un número real, entonces:

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c).$$

Si r es una función racional dada por $r(x) = p(x)/q(x)$ y c un número real tal que $q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}.$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RADICAL

Si n es un entero positivo. El siguiente límite es válido para toda c si n es impar, y para toda $c > 0$ si n es par:

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x\to c} g(x) = L$ y $\lim_{x\to L} f(x) = f(L)$, entonces:

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L).$$

LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea c un número real en el dominio de una función trigonométrica dada.

1. $\lim\limits_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$ **2.** $\lim\limits_{x \to c} \cos x = \cos c$

3. $\lim\limits_{x \to c} \tan x = \tan c$ **4.** $\lim\limits_{x \to c} \cot x = \cot c$

5. $\lim\limits_{x \to c} \sec x = \sec c$ **6.** $\lim\limits_{x \to c} \csc x = \csc c$

Ejemplo: Límites de funciones trigonométricas

***a*)** $\lim\limits_{x \to 0} \tan x = \tan(0) = 0$

***b*)** $\lim\limits_{x \to \pi} (x \cos x) = \left(\lim\limits_{x \to \pi} x\right)\left(\lim\limits_{x \to \pi} \cos x\right) = \pi \cos(\pi) = -\pi$

***c*)** $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}^2 x = \lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^2 = 0^2 = 0$

CEU Universidad San Pablo

FUNCIONES QUE COINCIDEN EN TODO SALVO EN UN PUNTO

Sea c un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene a c. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a c, entonces también existe el límite de $f(x)$ y

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x).$$

Estrategia para el cálculo de límites:

- **Si el límite de *f*(*x*)** cuando *x* se aproxima a *c* **no se puede evaluar por sustitución directa**, es necesario **encontrar una función *g* que coincida con *f* para todo *x* distinto de *x* = *c***
- **El límite de *g* se debe poder evaluar por medio de sustitución directa** para **poder concluir de manera analítica que:**

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = g(c)$$

Ejemplo: Técnica de cancelación

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

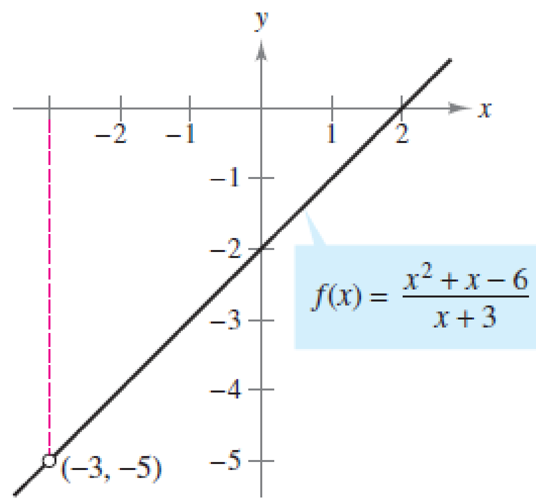
- No se puede realizar una sustitución directa puesto que **el límite del numerador y del denominador son 0 → 0/0 = indeterminación**

- Si **factorizamos el numerador** veremos cuál es su ***factor común*** **con el denominador**

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{\cancel{x+3}} = x - 2 = g(x), \qquad x \neq -3$$

- Por tanto, aplicando el "**Teorema de las funciones que coinciden salvo en un punto**" tenemos que:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x \to -3} (x - 2) = -5$$



f no está definida para $x = -3$

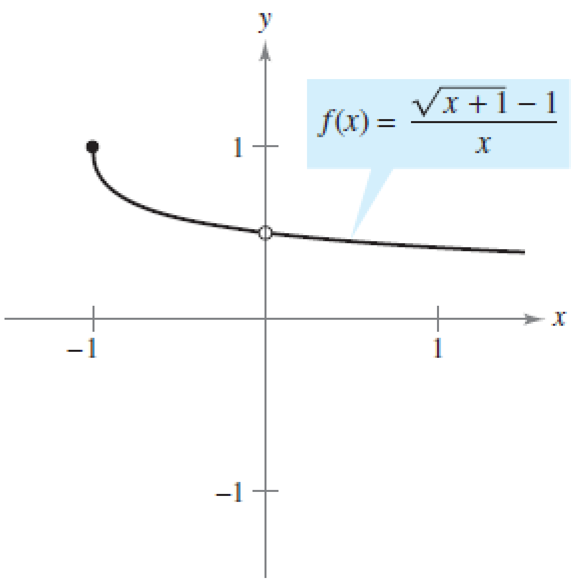
Ejemplo: Técnica de racionalización

Encontrar el límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

- Si realizamos **sustitución directa** llegamos a la **indeterminación** 0/0
- En este caso, se puede **reescribir la fracción racionalizando el numerador** para encontrar el factor común

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right) = \frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}, \qquad x \neq 0$$



- Y finalmente **evaluar el límite:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: Técnica del encaje y límites trigonométricos especiales

TEOREMA DEL ENCAJE

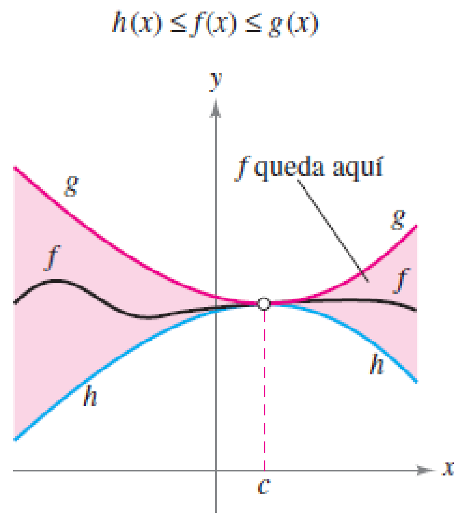
Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todos los x en un intervalo abierto que contiene a c, por la posible excepción de la propia c, y si

$$\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$$

entonces el $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a L.

DOS LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS ESPECIALES

1. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ **2.** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$



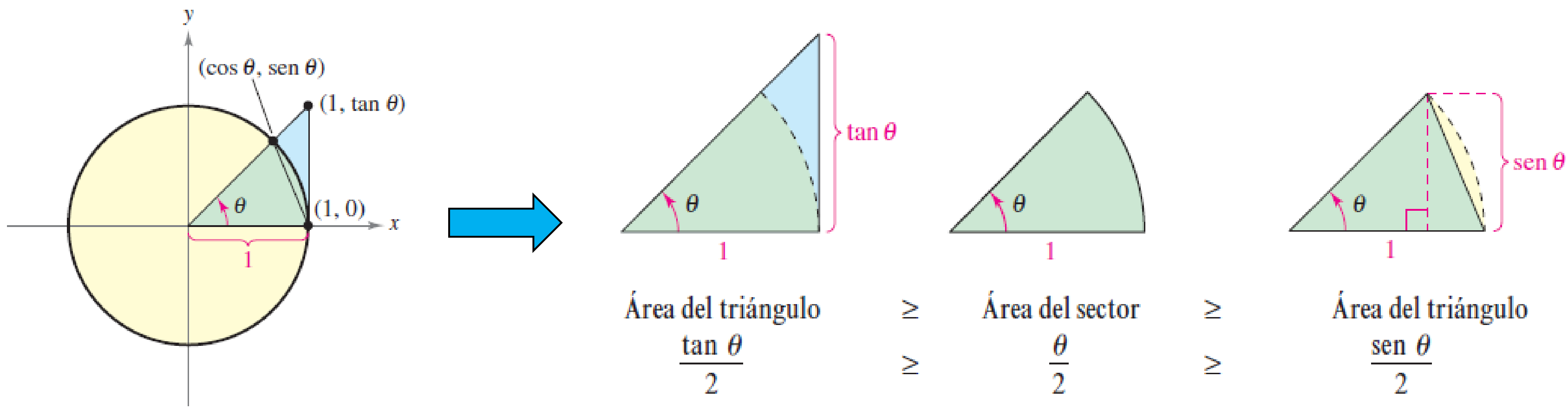
Teorema del encaje

NOTA: El teorema del encaje nos servirá para demostrar los límites anteriores

Ejemplo (continuación): Técnica del encaje y límites trigonométricos especiales

Demostrar el límite: $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{sen\,\theta}{\theta} = 1$

- La siguiente figura muestra un sector circular encajado entre dos triángulos



- Al **multiplicar** cada expresión **por 2/senθ**, tomando sus **recíprocos e invirtiendo las desigualdades** se obtiene: $\cos\theta \leq \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq 1$

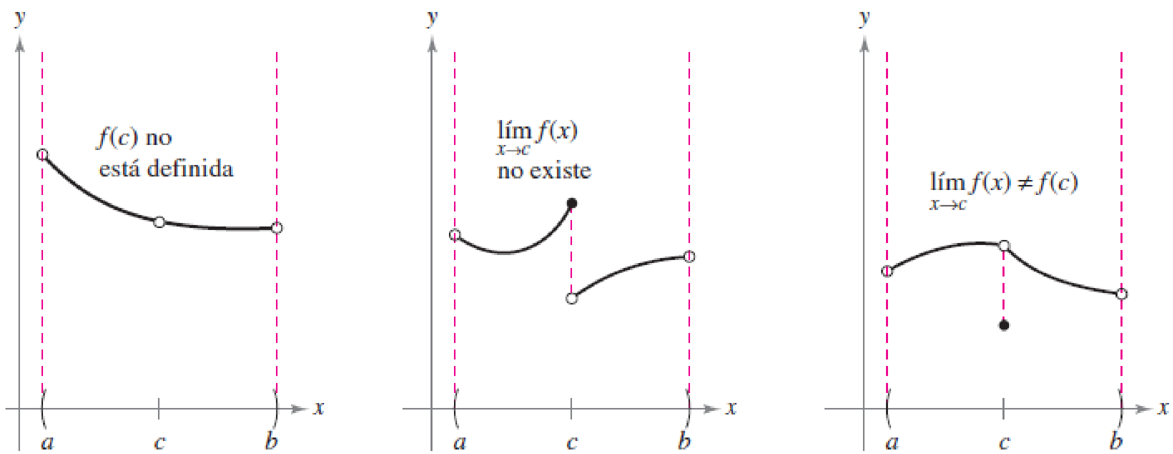
- Se puede utilizar la **técnica del encaje** para concluir que: $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ y $\lim\limits_{\theta\to 0} 1 = 1$ $\boxed{\lim\limits_{\theta\to 0}(\operatorname{sen}\theta)/\theta = 1}$

Definición informal de la continuidad de una función:

Decir que una función ***f* es continua en *x* = *c*** significa que **no hay interrupción de la gráfica de *f* en *c* → la gráfica no tiene saltos o huecos en *c***

CONDICIONES DE DISCONTINUIDAD DE FUNCIONES:

1. **La función no** está **definida** en $x = c$
2. **No existe el límite** de $f(x)$ en $x = c$
3. **El límite** de $f(c)$ en $x = c$ **existe, pero no es igual a $f(c)$**



DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Continuidad en un punto: Una función f es **continua en c** si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

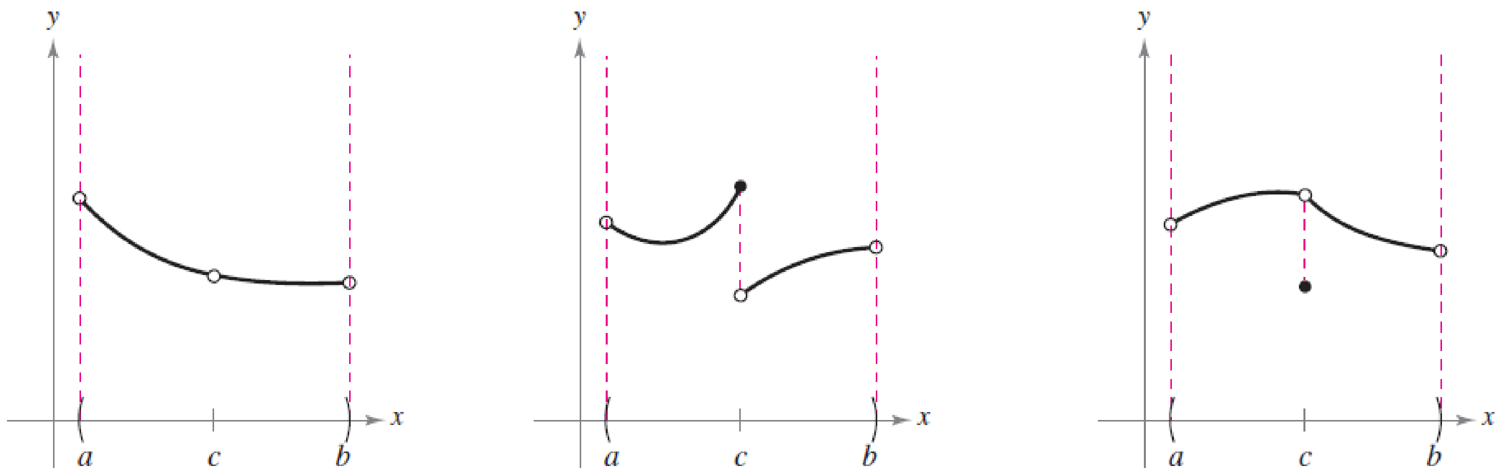
Continuidad en un intervalo abierto: Una función es **continua en un intervalo abierto (a, b)** si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en la recta completa de los números reales $(-\infty, \infty)$ es **continua en todas partes**.

Considerar un intervalo abierto *I* que contiene un número real *c*

- Si una función ***f*** **está definida en *I*** (excepto, posiblemente, en *c*) y **no es continua en c**, se dice que ***f*** **tiene una discontinuidad en *c***

CATEGORÍAS DE DISCONTINUIDADES

1. **Evitables o removibles** → *f* se puede hacer continua redefiniendo apropiadamente *f*(*c*)
2. **Inevitables o no removibles** → *f* no puede hacerse continua redefiniendo *f*(*c*)

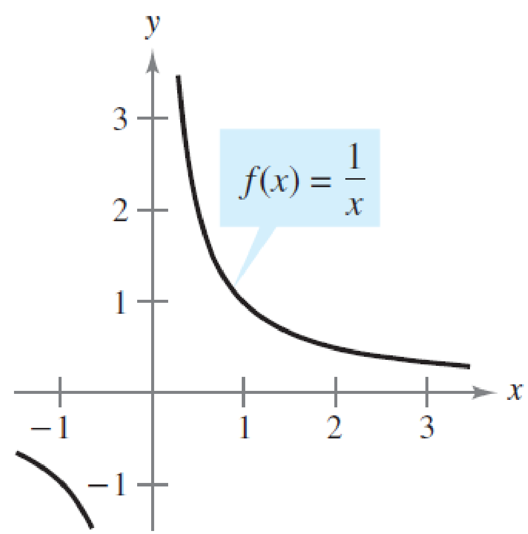


a) Discontinuidad evitable o removible *b*) Discontinuidad inevitable o no removible *c*) Discontinuidad evitable o removible

Ejemplo: Analizar la continuidad de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

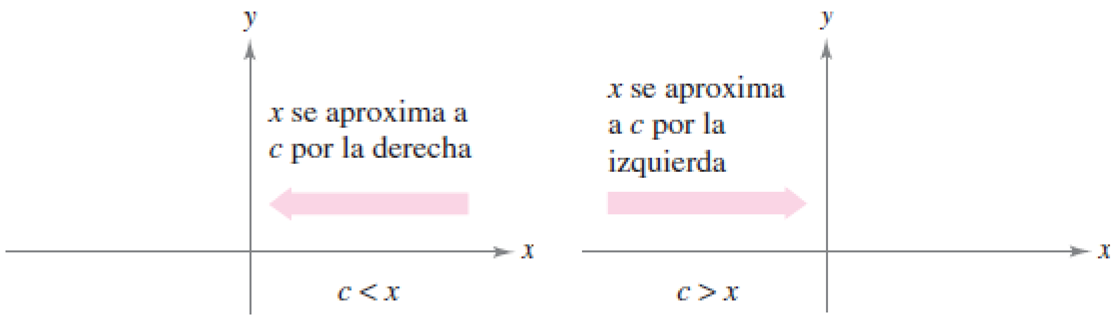
- El **dominio de *f*** lo constituyen **todos los números reales distintos de cero**
- ***f* cumple las tres condiciones de continuidad** en todos sus puntos **excepto en *x* = 0**
- Existe una **discontinuidad inevitable en *x* = 0**, ya que no hay modo de redefinir f(0) para que la nueva función sea continua en *x* = 0

Discontinuidad inevitable o no removible en x = 0



Límites laterales:

1. **Límite por la derecha** → *x* se aproxima a *c* por valores superiores a *c* ⟹ $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$
2. **Límite por la izquierda** → *x* se aproxima a *c* por valores inferiores a *c* ⟹ $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$

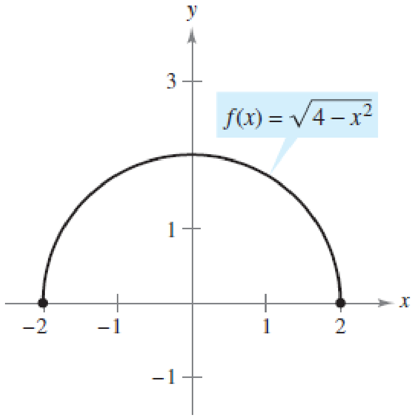


a) Límite por la derecha *b*) Límite por la izquierda

Ejemplo:

Encontrar el límite de f(x) cuando x se aproxima a -2 por la derecha

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \qquad \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$$



Cuando el límite por la izquierda no es igual al límite por la derecha, el límite (bilateral) no existe:

EXISTENCIA DE UN LÍMITE

Si f es una función y c y L son números reales, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L si y sólo si

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

Este concepto de límite lateral extiende la definición de continuidad a los intervalos cerrados:

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD EN UN INTERVALO CERRADO

Una función f es **continua en un intervalo cerrado [a, b]** si es continua en el intervalo abierto (a, b) y

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

La función f es **continua por la derecha** en a y **continua por la izquierda** en b.

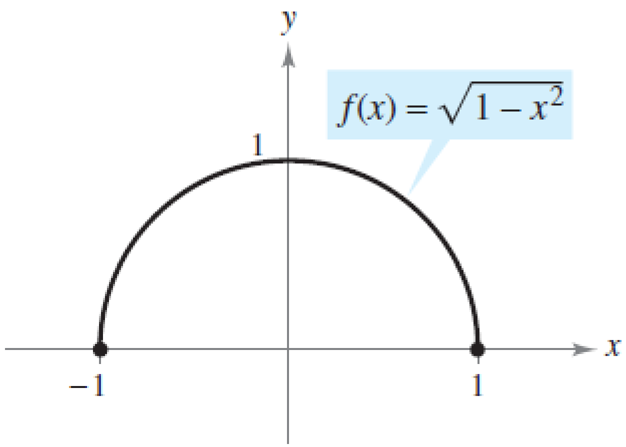
Ejemplo: Continuidad en un intervalo cerrado

Analizar la continuidad de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

- El **dominio de *f*** es el intervalo cerrado **[-1, 1]**
- En **todos los puntos del intervalo abierto (-1, 1)** *f* cumple las **condiciones de continuidad**
- **Además:**

$$\lim_{x \to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1)$$ Continua por la derecha.

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1)$$ Continua por la izquierda.



Función continua en $[-1, 1]$

- Por lo que **se puede concluir que:**

  ***f* es continua en el intervalo cerrado [-1, 1]**

PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD

Si b es un número real y f y g son continuas en $x = c$, entonces las siguientes funciones también son continuas en c.

1. Múltiplo escalar: bf
2. Suma y diferencia: $f \pm g$
3. Producto: fg
4. Cociente: $\dfrac{f}{g}$, si $g(c) \neq 0$

Las funciones de los siguientes tipos son continuas en sus dominios:

1. Funciones polinomiales: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
2. Funciones racionales: $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$
3. Funciones radicales: $f(x) = \sqrt[n]{x}$
4. Funciones trigonométricas: sen x, cos x, tan x, cot x, sec x, csc x

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, entonces la función compuesta dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en c.

Demostración:

- Por **definición de continuidad** $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$ y $\lim_{x \to g(c)} f(x) = f(g(c))$
- Al **aplicar el teorema del límite de una función compuesta** con $L = g(c)$ se obtiene:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(\lim_{x \to c} g(x)) = f(g(c))$$

- **De esta manera,** $(f \circ g) = f(g(x))$ **es continua en** ***c***

Ejemplo: Prueba de la continuidad

Describir el intervalo o intervalos donde la siguiente función es continua:

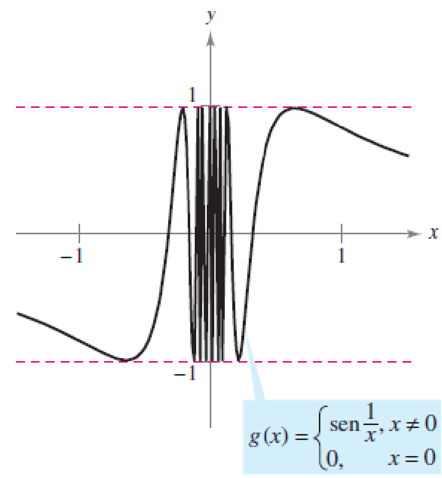
$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- Puesto que ***y* = 1/*x* es continua excepto en *x* = 0** y **la función seno es continua para todos los valores reales de *x***, resulta que ***g*(*x*) es continua en todos los valores reales salvo en *x* = 0**

- **En *x* = 0, no existe el límite de *g(x)***

- Por tanto, ***g* es continua en los siguientes intervalos:**

$$(-\infty, 0) \text{ y } (0, \infty)$$



TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = k.$$

NOTA:

- El **teorema del valor intermedio** suele **emplearse para localizar los ceros de una función continua en un intervalo cerrado**
- **Si f es continua en [*a, b*], y *f*(*a*) y *f*(*b*) tienen signo distinto**, entonces el teorema nos **garantiza la existencia de por lo menos un cero de *f* en** el intervalo cerrado **[*a, b*]**

Ejemplo:

Utilizar el teorema del valor intermedio para demostrar que $f(x) = x^3 + 2x - 1$ tiene un cero en el intervalo [0, 1]

- Se observa que ***f*** **es continua en el intervalo cerrado [0, 1]**

- **Dado que:**

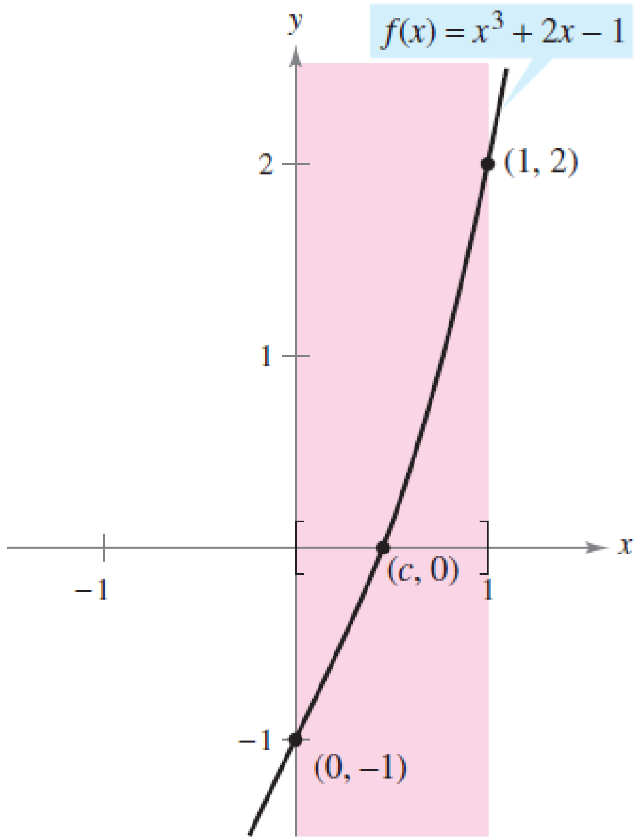
$$f(0) = 0^3 + 2(0) - 1 = -1$$

$$f(1) = 1^3 + 2(1) - 1 = 2$$

resulta que:

$$f(0) < 0 \text{ y } f(1) > 0$$

Aplicando el teorema del valor intermedio se concluye que debe existir algún *c* en [0, 1] tal que *f*(*c*) = 0



f es continua en [0,1] con $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$

DEFINICIÓN DE LÍMITES INFINITOS

Sea f una función definida en todo número real de un intervalo abierto que contiene a c (salvo, posiblemente, en el propio c). La expresión

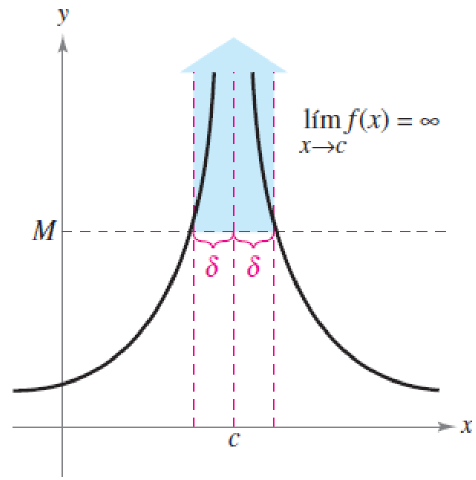
$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

significa que para toda $M > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Del mismo modo, la expresión

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

significa que para todo $N < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

Para definir el **límite infinito por la izquierda**, sustituir $0 < |x - c| < \delta$ por $c - \delta < x < c$. Y para definir el **límite infinito por la derecha**, reemplazar $0 < |x - c| < \delta$ por $c < x < c + \delta$.



Límites infinitos

NOTA:

- El **signo de igualdad** en la expresión $f(x) = \infty$ **no significa que el límite exista**
- Por el contrario, **indica la razón de su *no existencia*** al denotar el comportamiento no acotado de $f(x)$ cuando x se aproxima a c

Ejemplo:

Sea *f* la función dada por $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

¿Qué ocurre cuando *x* se aproxima a 2?

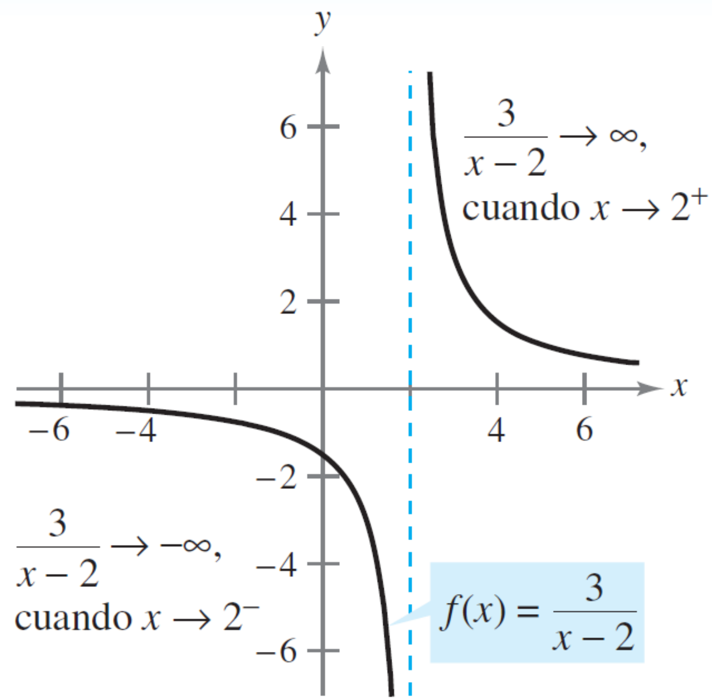
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$$ $f(x)$ decrece sin cota o sin límite cuando x se aproxima a 2 por la izquierda.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = \infty$$ $f(x)$ crece sin cota o sin límite cuando x se aproxima a 2 por la derecha.

x se aproxima a 2 por la izquierda. → ← x se aproxima a 2 por la derecha.

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	−6	−30	−300	−3 000	?	3 000	300	30	6

$f(x)$ decrece sin cota o sin límite. → ← $f(x)$ crece sin cota o sin límite.



$f(x)$ crece y decrece sin cota o sin límite cuando x tiende a 2

NOTA: Un **límite en el que *f*(*x*) crece o decrece sin cota** cuando *x* tiende a *c* **se llama límite infinito**

CEU Universidad San Pablo

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTA VERTICAL

Si $f(x)$ tiende a infinito (o menos infinito) cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f.

NOTA:

Si la gráfica de una **función *f* tiene una asíntota vertical en *x* = *c***, entonces ***f* no es continua en *c***

ASÍNTOTAS VERTICALES

Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ en el intervalo, entonces la gráfica de la función está dada por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en $x = c$.

Límites infinitos:
Asíntotas verticales II

Ejemplo:

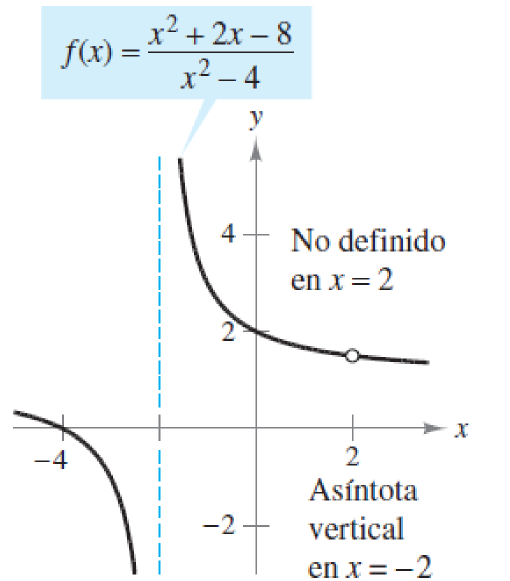
Determinar todas las asíntotas verticales de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$

- En primer lugar es necesario **simplificar la expresión**:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x + 4)\cancel{(x - 2)}}{(x + 2)\cancel{(x - 2)}} = \frac{x + 4}{x + 2}, \quad x \neq 2$$

- Aplicando el teorema de las asíntotas verticales se puede concluir **que existe una asíntota vertical en *x* = -2**

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \infty$$



$f(x)$ crece y decrece sin cota o sin límite cuando x tiende a -2

NOTA: Es importante observar que *x* = 2 no es una asíntota vertical

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS

Sean c y L números reales, y f y g funciones tales que

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = L.$$

1. **Suma o diferencia:** $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \infty$
2. **Producto:** $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = \infty, \quad L > 0$

   $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = -\infty, \quad L < 0$
3. **Cociente:** $\lim_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades análogas son válidas para límites laterales y para funciones cuyo límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es $-\infty$.

Ejemplo: Cálculo de límites utilizando las propiedades de los límites infinitos

a) Puesto que $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, se puede escribir

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \infty. \qquad \text{Propiedad 1}$$

b) Puesto que $\lim_{x\to 1^-} (x^2 + 1) = 2$ y $\lim_{x\to 1^-} (\cot \pi x) = -\infty$, se deduce que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + 1}{\cot \pi x} = 0. \qquad \text{Propiedad 3}$$

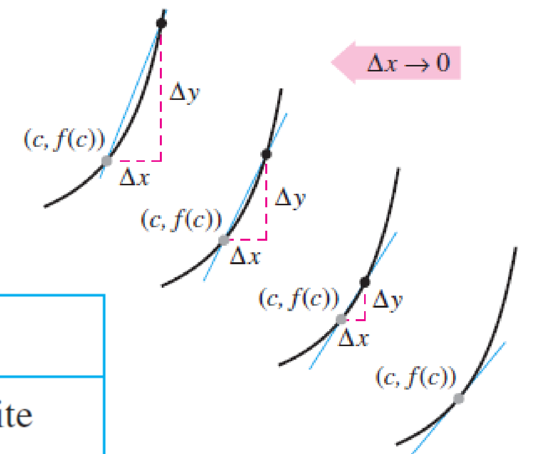
c) Al ser $\lim_{x\to 0^+} 3 = 3$ y $\lim_{x\to 0^+} \cot x = \infty$, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} 3 \cot x = \infty. \qquad \text{Propiedad 2}$$

El problema de **encontrar la recta tangente a la función *f* en un punto *P*** se reduce al de **calcular su *pendiente* en ese punto**

Se puede **aproximar la pendiente de la recta tangente** usando la **recta secante que pasa por *P* y por otro punto cercano** de la curva

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \boxed{m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}}$$



DEFINICIÓN DE LA RECTA TANGENTE CON PENDIENTE *m*

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con una pendiente m es la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

Ejemplo:

Calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de *f*(*x*) en los puntos (0, 1) y (-1, 2)

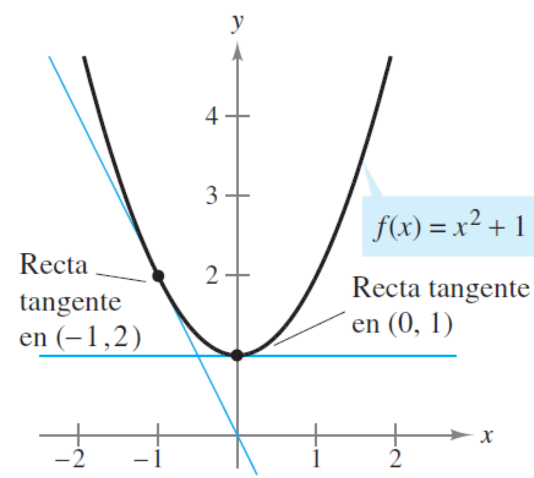
$$f(x) = x^2 + 1$$

Sea (*c*, *f*(*c*)) un punto cualquiera de la gráfica de *f*: la pendiente de la recta tangente en él se encuentra mediante:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(c + \Delta x)^2 + 1] - (c^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c^2 + 2c(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 1 - c^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2c(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2c + \Delta x) = 2c$$



La pendiente en cualquier punto (*c*, *f*(*c*)) de la gráfica de *f* es *m* = 2*c*

- En el punto (0, 1) la pendiente es *m* = 2(0) = 0
- En el punto (-1, 2) la pendiente es *m* = 2(-1) = -2

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La **derivada** de f en x está dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x.

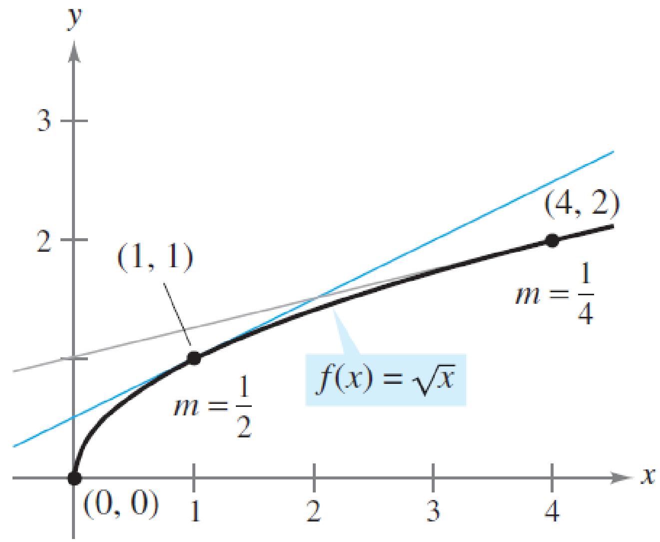
Una **función es derivable en *x* si su derivada en *x* existe**, y **derivable en un intervalo abierto** (a, b) **si es derivable en todos y cada uno de los puntos** de ese intervalo

NOTA: Notaciones más comunes → $f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[y]$

Ejemplo: Uso de la derivada para calcular la pendiente en un punto

- Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$
- Calcular la pendiente de la gráfica de f en los puntos (1, 1) y (4, 2)
- Analizar el comportamiento de f en (0, 0)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0
\end{aligned}
$$



La pendiente de f en $(x, f(x))$, $x > 0$, es $m = 1/(2\sqrt{x})$

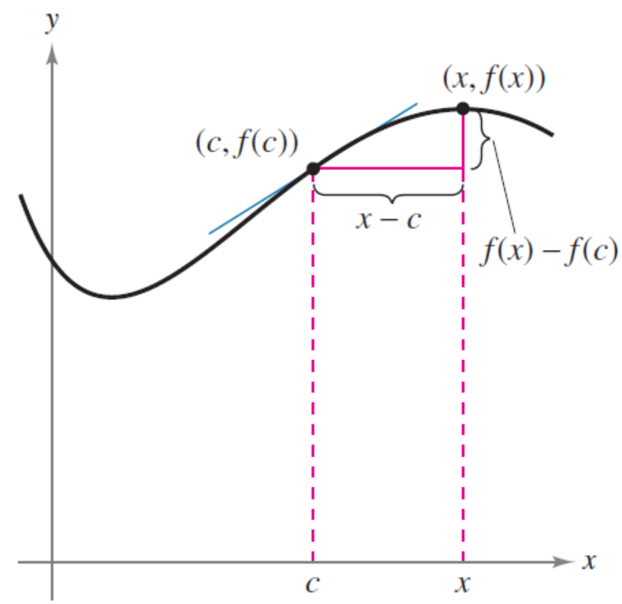
- En el punto **(0, 0)** la **pendiente no está definida**
- La gráfica de ***f* tiene tangente vertical en (0, 0)**

¿Qué relación existe entre derivabilidad y continuidad?

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

- La **derivada de *f* en *c*** se calcula según la expresión anterior siempre que dicho **límite exista → los límites laterales deben existir y ser iguales**

- Se dice **que *f* es derivable en un intervalo cerrado [*a*, *b*]** si:
  - es **derivable en (*a*, *b*) y**
  - **existen** además la **derivada por la derecha en *a*** y la **derivada por la izquierda en *b***



¿Qué relación existe entre derivabilidad y continuidad?

DERIVABLE IMPLICA CONTINUA
Si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

Demostración: para comprobar que f es continua en $x = c$ bastará con mostrar que $f(x)$ tiende a $f(c)$ cuando $x \to c$

$$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} \left[(x - c) \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \right] = (0)[f'(c)] = 0$$

Puesto que la diferencia $f(x)$ - $f(c)$ tiende a cero cuando $x \to c$, ***f* es continua en *x* = *c***

Por tanto:

- **Si** una función **es derivable** en $x = c$ **entonces es continua** en ese punto
- **Si** una función no es continua en $x = c$ **no puede ser derivable** en ese punto
- Es posible que una función sea continua en $x = c$ sin ser derivable → **continua no implica derivable**

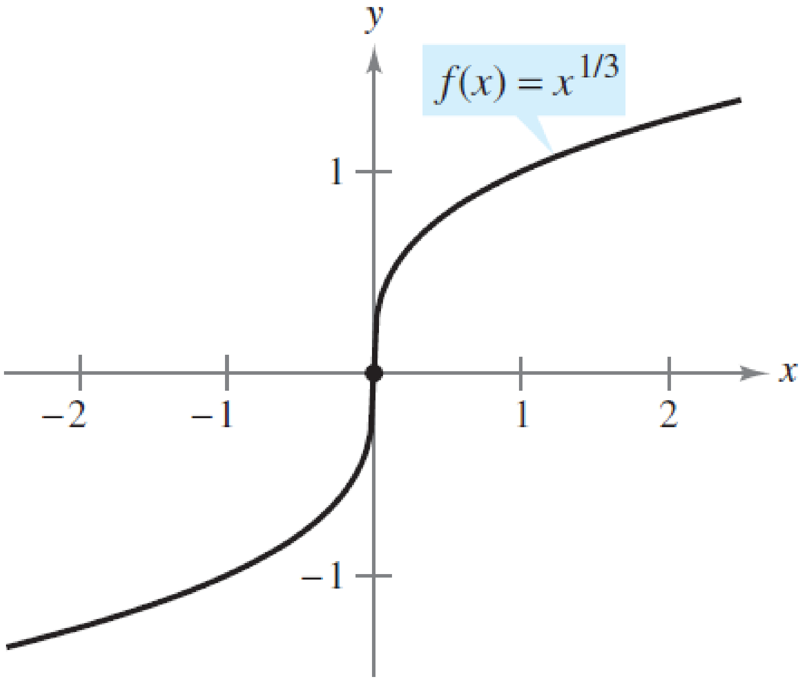
Ejemplo: gráfica con recta tangente vertical

La función

$$f(x) = x^{1/3}$$

es **continua en *x = 0***, sin embargo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$$
$$= \infty$$



f no es derivable en $x = 0$, porque tiene tangente vertical en ese punto

Reglas básicas de derivación y razón de cambio:
La regla de la constante

LA REGLA DE LA CONSTANTE

La derivada de una función constante es 0. Es decir, si c es un número real, entonces

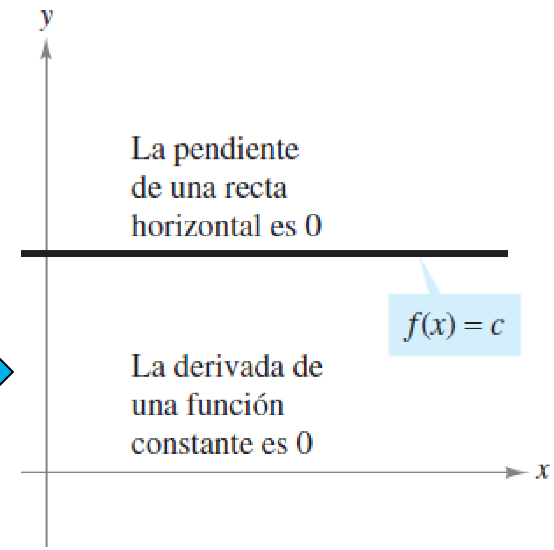
$$\frac{d}{dx}[c] = 0.$$

Demostración:

Sea $f(x) = c$. Entonces, por la definición de derivada mediante el proceso de límite se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[c] &= f'(x)\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0\end{aligned}$$

Se observa que la regla de la constante equivale a decir que la pendiente de una recta horizontal es 0. Esto demuestra la relación que existe entre derivada y pendiente



LA REGLA DE LA POTENCIA

Si n es un número racional, entonces la función $f(x) = x^n$ es derivable y

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Para que f sea derivable en $x = 0$, n debe ser un número tal que x^{n-1} se encuentre definido en un intervalo que contenga al 0.

Demostración:

Si n es un entero positivo mayor que 1, el desarrollo del binomio resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^n] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] \\
&= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0 \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE

Si f es una función derivable y c un número real, entonces cf también es derivable y $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$.

Demostración:

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= c\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] = cf'(x)$$

NOTA: Las constantes se pueden extraer de la derivada, incluso si aparecen en el denominador

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{c}\right] = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{c}\right)f(x)\right] = \left(\frac{1}{c}\right)\frac{d}{dx}[\quad f(x)] = \left(\frac{1}{c}\right)f'(x)$$

LAS REGLAS DE SUMA Y DIFERENCIA

La derivada de la suma (o de la diferencia) de dos funciones derivables f y g es derivable en sí. Además, la derivada de $f + g$ (o $f - g$) es igual a la suma (o diferencia) de las derivadas de f y g.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$ Regla de la suma.

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$ Regla de la diferencia.

Demostración:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$$

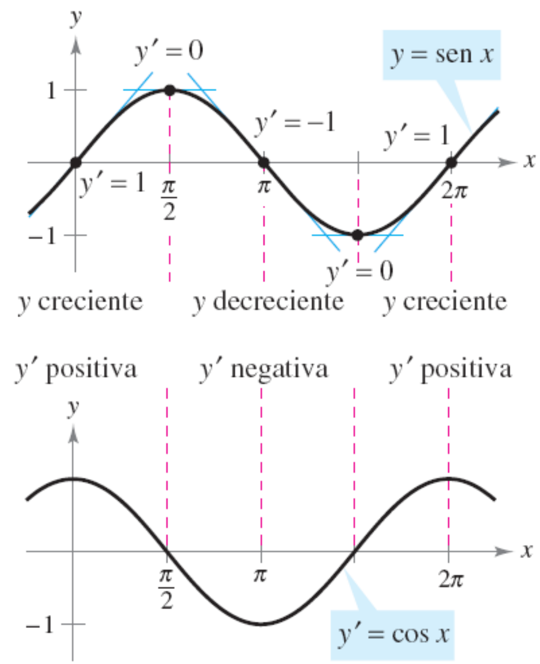
NOTA: Las reglas de suma y diferencia se pueden ampliar a cualquier número finito de funciones

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$$

Demostración (para $f(x) = \operatorname{sen} x$):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} \Delta x - (\operatorname{sen} x)(1 - \cos \Delta x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x)\left(\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right) - (\operatorname{sen} x)\left(\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}\right)\right]\\
&= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right) - \operatorname{sen} x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}\right)\\
&= (\cos x)(1) - (\operatorname{sen} x)(0)\\
&= \cos x
\end{aligned}$$



La derivada se utiliza para **determinar la razón de cambio de una variable con respecto a otra** → tasas de crecimiento, tasas de producción, tasas de flujo de un líquido, velocidad, aceleración…

Uso frecuente: Descripción del movimiento de un objeto que va en línea recta

La función *s* que representa la posición (respecto al origen) de un objeto como función del tiempo *t* se denomina **función de posición** → si durante cierto lapso de tiempo Δt el objeto cambia su posición en una cantidad $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, entonces su **velocidad media** es:

$$\text{Razón} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} \Rightarrow \frac{\text{Cambio en distancia}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

En general, si **s = s(t) es la función posición** de un objeto en movimiento rectilíneo, su **velocidad en el instante t es**:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

La **función posición** de un **objeto en caída libre** bajo la **influencia de la gravedad** es:

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0$$

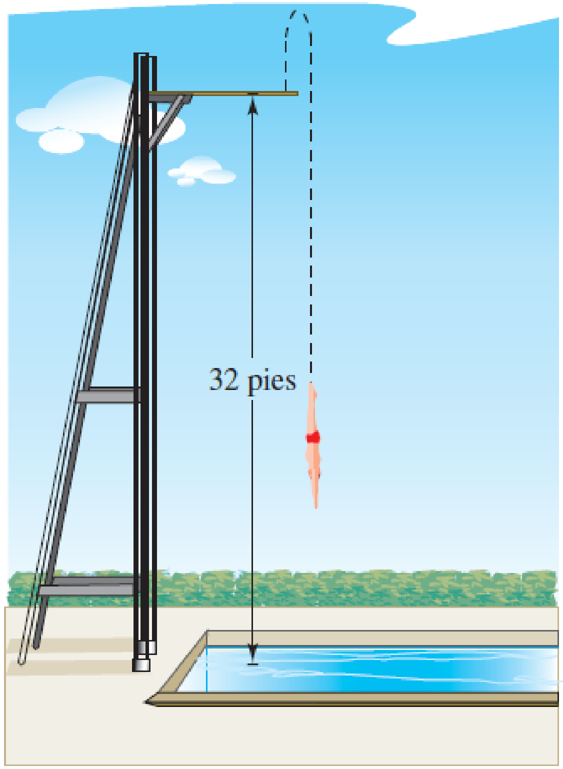
Ejemplo: Aplicación de la derivada para calcular la velocidad

En el instante t = 0, un nadador se lanza desde un trampolín que está a 32 pies sobre el nivel del agua, y durante la caída, su posición está dada por:

$$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$$

donde *s* se mide en pies y *t* en segundos.

NOTA: g = -32 pies/s^2



a) ¿Cuánto tarda el nadador en llegar al agua?

Hacemos $s = 0$ y despejamos t :

$-16t^2 + 16t + 32 = 0 \rightarrow -16(t + 1)(t - 2) = 0$, **t = 2 segundos**

b) ¿Cuál es su velocidad en el momento del impacto?

$s'(t) = -32t + 16 \rightarrow s'(2) = -32(2)+16 =$ **-48 pies por segundo**

LA REGLA DEL PRODUCTO

El producto de dos funciones derivables f y g también es derivable. Además, su derivada es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

NOTA: La regla del producto es extensiva a multiplicaciones con más de dos factores

LA REGLA DEL COCIENTE

El cociente f/g de dos funciones derivables f y g también es derivable para todos los valores de x para los que $g(x) \neq 0$. Además, la derivada de f/g se obtiene mediante el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x) g(x+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x) g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{g(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - f(x)\left[\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} [g(x)g(x+\Delta x)]} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Conocidas las derivadas de las funciones seno y coseno, la **regla del cociente permite establecer** las de las **cuatro funciones trigonométricas restantes**

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	
$\dfrac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\dfrac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$
$\dfrac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\dfrac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$

Demostración (para *f*(*x*) = tan *x*): Considerando tan *x* = (sen *x*) / (cos *x*) y aplicando la regla del cociente, se obtiene

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Ejemplo: Diferentes formas de una derivada

Derivar ambas formas de la siguiente función

$$y = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \csc x - \cot x$$

Primera forma:

$$y' = \frac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Segunda forma:

$$y' = -\csc x \cot x + \csc^2 x$$

Para **demostrar que ambas derivadas son idénticas**, basta escribir:

$$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \csc^2 x - \csc x \cot x$$

La **segunda derivada de *f*** es la **derivada de la primera derivada de *f*** → la segunda derivada es un **ejemplo de derivada de orden superior**

Las **derivadas de orden superior se denotan** como se muestra a continuación:

Primera derivada:	y',	$f'(x)$,	$\frac{dy}{dx}$,	$\frac{d}{dx}[f(x)]$,	$D_x[y]$
Segunda derivada:	y'',	$f''(x)$,	$\frac{d^2y}{dx^2}$,	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$,	$D_x^2[y]$
Tercera derivada:	y''',	$f'''(x)$,	$\frac{d^3y}{dx^3}$,	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$,	$D_x^3[y]$
Cuarta derivada:	$y^{(4)}$,	$f^{(4)}(x)$,	$\frac{d^4y}{dx^4}$,	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$,	$D_x^4[y]$
⋮					
n-ésima derivada:	$y^{(n)}$,	$f^{(n)}(x)$,	$\frac{d^ny}{dx^n}$,	$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$,	$D_x^n[y]$

Ejemplo de uso: la segunda derivada de la función posición es la **función aceleración**

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

En la Luna, **la función posición** para un objeto que cae en ella viene definida por la función:

$$s(t) = -0.81t^2 + 2$$

$s(t)$ es la altura en metros y t es el tiempo en segundos

¿Cuáles la relación entre la fuerza de la gravedad de la Tierra y la de la Luna?

$s(t) = -0.81t^2 + 2$		Función posición
$s'(t) = -1.62t$		Función velocidad
$s''(t) = -1.62$		Función aceleración

La **aceleración de la gravedad en la Luna es de -1.62 m/s²**. Como sabemos que la **aceleración de la gravedad en la Tierra es de -9.8 m/s²**, la fuerza de la gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna es:

$$\frac{\text{Fuerza de gravedad en la Tierra}}{\text{Fuerza de gravedad en la Luna}} = \frac{-9.8}{-1.62} \approx 6.0$$

La **regla de la cadena** establece que si ***y* cambia *dy/du* veces más rápido que *u***, mientras que ***u* cambia *du/dx* veces más rápido que *x***, entonces ***y* cambia (*dy/du*)(*du/dx*) veces más rápido que x**

Ejemplo:

En un juego de ruedas dentadas la segunda y la tercera giran sobre un eje común. Cuando la primera gira, impulsa a la segunda y ésta a su vez a la tercera. Sean *y*, *u* y *x* los números de revoluciones por minuto del primero, segundo y tercer ejes. Encontrar *dy/du*, *du/dx* y *dy/dx*, y verificar que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- El **primer eje debe dar tres vueltas** para que **el segundo complete una** → $\frac{dy}{du} = 3$
- El **segundo eje debe dar dos vueltas** para que **el tercero complete una** → $\frac{du}{dx} = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\begin{array}{l}\text{Razón de cambio del primer} \\ \text{eje con respecto al segundo}\end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{l}\text{Razón de cambio del segundo} \\ \text{eje con respecto al tercero}\end{array}} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3 \cdot 2 = 6 = \boxed{\begin{array}{l}\text{Razón de cambio del primer} \\ \text{eje con respecto al tercero}\end{array}}$$

LA REGLA DE LA CADENA

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u y además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

Función exterior

$$y = f(g(x)) = f(u)$$

Función interior

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

Demostración: Sea $h(x) = f(g(x))$. Es necesario demostrar que para $x = c$, $h'(c) = f'(g(c))g'(c)$

$$h'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right], \quad g(x) \neq g(c)$$

$$= \left[\lim_{x \to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \right] \left[\lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] = f'(g(c))g'(c)$$

Ejemplo: Descomposición de una función compuesta

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
a)	$y = \dfrac{1}{x+1}$	$u = x + 1$	$y = \dfrac{1}{u}$
b)	$y = \operatorname{sen} 2x$	$u = 2x$	$y = \operatorname{sen} u$
c)	$y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$	$u = 3x^2 - x + 1$	$y = \sqrt{u}$
d)	$y = \tan^2 x$	$u = \tan x$	$y = u^2$

Ejemplo: Aplicación de la regla de la cadena

Encontrar dy/dx para $y = (x^2 + 1)^3 \rightarrow u = x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{3(x^2 + 1)^2}_{\frac{dy}{du}}\underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} = 6x(x^2 + 1)^2$$

LA REGLA GENERAL DE LA POTENCIA

Si $y = [u(x)]^n$, donde u es una función derivable de x y n es un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[u^n] = n\,u^{n-1}\,u'$$

Demostración:

Puesto que $y = u^n$, aplicamos la regla de la cadena para obtener $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{du}[u^n]\frac{du}{dx}$

Por medio de la regla (simple) de la potencia, se tiene $D_u[u^n] = nu^{n-1}$

Y por tanto: $\displaystyle \frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$

Técnicas para simplificar las derivadas de funciones que involucran productos, cocientes y composiciones

Ejemplo: Simplificación por factorización de la potencia mínima

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2\sqrt{1-x^2} && \text{Función original.}\\
&= x^2(1-x^2)^{1/2} && \text{Reescribir.}\\
f'(x) &= x^2\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{1/2}\right] + (1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}\left[x^2\right] && \text{Regla del producto.}\\
&= x^2\left[\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)\right] + (1-x^2)^{1/2}(2x) && \text{Regla general de la potencia.}\\
&= -x^3(1-x^2)^{-1/2} + 2x(1-x^2)^{1/2} && \text{Simplificar.}\\
&= x(1-x^2)^{-1/2}\left[-x^2(1) + 2(1-x^2)\right] && \text{Factorizar.}\\
&= \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} && \text{Simplificar.}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Simplificación de la derivada de un cociente

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 4}} \qquad \text{Función original.}$$

$$= \frac{x}{(x^2 + 4)^{1/3}} \qquad \text{Reescribir.}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 4)^{1/3}(1) - x(1/3)(x^2 + 4)^{-2/3}(2x)}{(x^2 + 4)^{2/3}} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{1}{3}(x^2 + 4)^{-2/3}\left[\frac{3(x^2 + 4) - (2x^2)(1)}{(x^2 + 4)^{2/3}}\right] \qquad \text{Factorizar.}$$

$$= \frac{x^2 + 12}{3(x^2 + 4)^{4/3}} \qquad \text{Simplificar.}$$

Ejemplo: Simplificación de la derivada de una potencia

$$y = \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2 \qquad \text{Función original.}$$

$$y' = \underset{n}{2}\underbrace{\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)}_{u^{n-1}}\underbrace{\frac{d}{dx}\left[\frac{3x-1}{x^2+3}\right]}_{u'} \qquad \text{Regla general de la potencia.}$$

$$= \left[\frac{2(3x-1)}{x^2+3}\right]\left[\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right] \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{2(3x-1)(3x^2+9-6x^2+2x)}{(x^2+3)^3} \qquad \text{Multiplicar.}$$

$$= \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3} \qquad \text{Simplificar.}$$

"Versiones de la regla de la cadena" correspondientes a las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)\, u'$$

$$\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)\, u'$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)\, u' \qquad \frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)\, u'$$

Ejemplo:

a) $y = \operatorname{sen} \overbrace{2x}^{u}$ $\qquad y' = \overbrace{\cos 2x}^{\cos u}\, \overbrace{\frac{d}{dx}[2x]}^{u'} = (\cos 2x)(2) = 2\cos 2x$

b) $y = \cos(x - 1)$ $\qquad y' = -\operatorname{sen}(x - 1)$

c) $y = \tan 3x$ $\qquad y' = 3\sec^2 3x$

CEU Universidad San Pablo

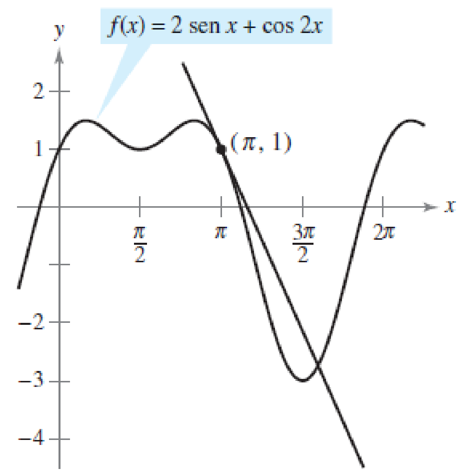
Ejemplo: Recta tangente a una función trigonométrica

- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2\text{sen}x + \cos 2x$ en el punto (π, 1)
- Determinar todos los valores de x en el intervalo (0, 2π) en los que la gráfica de *f* tiene una tangente horizontalπ

Primero se calcula $f'(x)$: $f'(x) = 2\cos x + (-\text{sen } 2x)(2) = 2\cos x - 2\text{ sen } 2x$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente en (π, 1), hay que evaluar $f'(\pi)$:

$$f'(\pi) = 2\cos\pi - 2\text{ sen } 2\pi = -2$$



Utilizando la forma punto-pendiente, se obtiene la ecuación de la recta tangente:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad y - 1 = -2(x - \pi) \qquad y = 1 - 2x + 2\pi$$

Se puede determinar que $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ cuando **x = π/6, π/2, 5π/6 y 3π/2** → ***f* tiene una tangente horizontal** en **x = π/6, π/2, 5π/6 y 3π/2**

RESUMEN de las reglas de derivación estudiadas hasta el momento

Reglas generales de derivación	Sean f, g y u funciones derivables de x.	
	Regla del múltiplo constante: $\frac{d}{dx}[cf] = cf'$	*Regla de la suma o de la diferencia*: $\frac{d}{dx}[f \pm g] = f' \pm g'$
	Regla del producto: $\frac{d}{dx}[fg] = fg' + gf'$	*Regla del cociente*: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{gf' - fg'}{g^2}$
Derivadas de funciones algebraicas	*Regla de la constante*: $\frac{d}{dx}[c] = 0$	*Regla simple de la potencia*: $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}[x] = 1$
Derivadas de funciones trigonométricas	$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$ $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$ $\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$ $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$ $\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$
Regla de la cadena	*Regla de la cadena*: $\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\, u'$	*Regla general de la potencia*: $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\, u'$

¿En qué se diferencian las funciones y ecuaciones explícitas de las implícitas?

- **Explícitas →** la variable ***y* está escrita explícitamente en función de *x***
- **Implícitas →** la variable ***y* no está escrita explícitamente en función de *x***

¿Qué hacer cuando es difícil despejar *y*?

DERIVACIÓN IMPLÍTICA

- Si aparecen **términos que solamente contienen a *x* → derivación habitual**
- Si aparecen **términos donde aparece *y* → regla de la cadena** (*y* está definida implícitamente como función derivable de *x*)

Estrategias para la derivación implícita

1. Derivar ambos lados de la ecuación *respecto de x*.
2. Agrupar todos los términos en que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.
3. Factorizar dy/dx del lado izquierdo de la ecuación.
4. Despejar dy/dx.

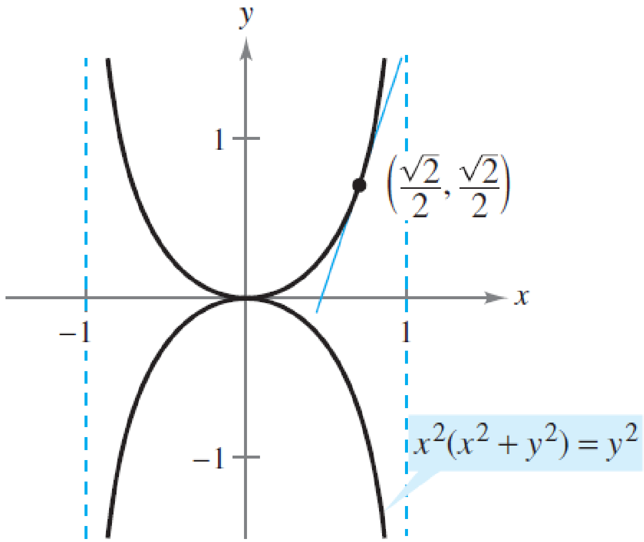
Ejemplo: Encontrar la tangente a la gráfica de $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

$$4x^3 + x^2\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 2xy^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = -2x(2x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(1 - x^2)}$$

Pendiente y ecuación de la recta tangente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{2}/2)[2(1/2) + (1/2)]}{(\sqrt{2}/2)[1 - (1/2)]} = \frac{3/2}{1/2} = 3 \Longrightarrow y = 3x - \sqrt{2}$$



Aplicación relevante de la regla de la cadena: encontrar **razones de cambio** de **dos o más variables relacionadas** que están **cambiando con respecto al tiempo**

Ejemplo: Dos razones de cambio relacionadas

Sean x e y dos funciones derivables de t, relacionadas por la ecuación $y = x^2 + 3$

Calcular dy/dt para $x = 1$, sabiendo que $dx/dt = 2$ para $x = 1$

- Es necesario derivar ambos lados con respecto t, utilizando la regla de la cadena

$$y = x^2 + 3 \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$\frac{d}{dt}[y] = \frac{d}{dt}[x^2 + 3] \qquad \text{Derivar con respecto a } t.$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

- Cuando $x = 1$ y $dx/dt = 2$ se tiene que $\dfrac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4$

Estrategia para la solución de problemas de razones de cambio relacionadas

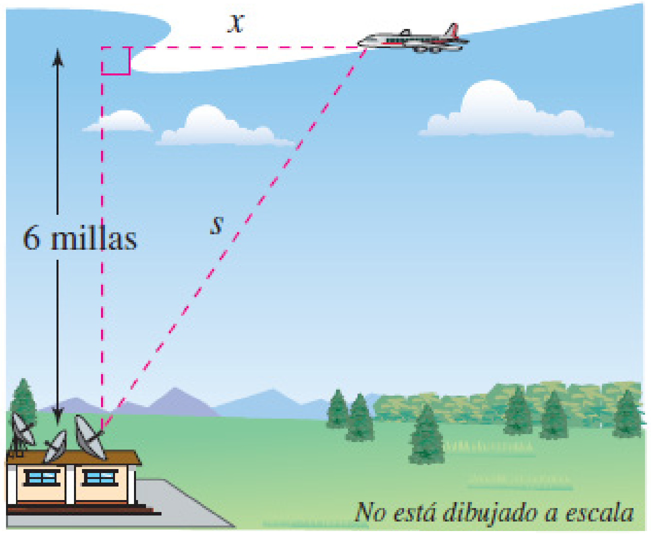
1. Identificar todas las cantidades *dadas* y *por determinar*. Hacer un esbozo y clasificarlas.
2. Escribir una ecuación que incluya las variables cuyas razones de cambio se encuentran en la información dada o deben calcularse.
3. Utilizando la regla de la cadena, derivar de manera implícita ambos lados de la ecuación con *respecto al tiempo* t.
4. *Después* de terminar el paso 3, sustituir en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio. Luego se despeja la razón de cambio requerida.

Ejemplo: Velocidad de un avión detectado por radar

Un avión vuela en dirección a una estación de radar a 6 millas de altura. Si *s* está decreciendo a razón de 400 millas por hora cuando *s* = 10 millas, ¿cuál es la velocidad del avión?

Sea *x* la distancia horizontal al radar, cuando *s* = 10 → $x = \sqrt{10^2 - 36} = 8$

- Ritmo dado: *ds*/*dt* = -400 cuando *s* = 10
- Encontrar: *dx*/*dt* cuando *s* = 10 y *x* = 8

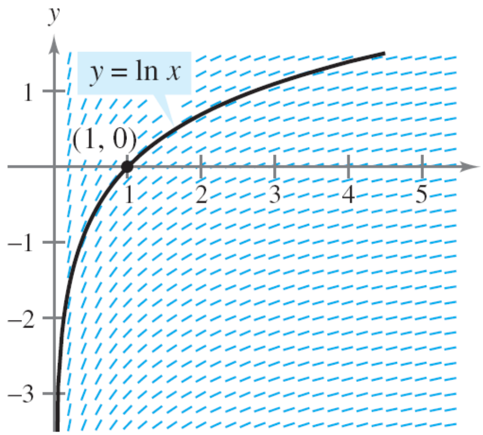


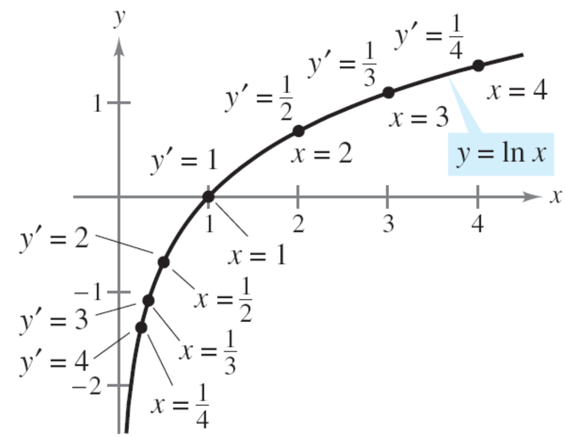
$x^2 + 6^2 = s^2$	Teorema de Pitágoras.
$2x\dfrac{dx}{dt} = 2s\dfrac{ds}{dt}$	Derivar con respecto a t.
$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{s}{x}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)$	Despejar dx/dt.
$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{10}{8}(-400)$	Sustituir s, x y ds/dt.
$= -500$ millas por hora	Simplificar.

La ***rapidez*** (o "velocidad" en sentido coloquial) es de **500 millas/h**

La función logaritmo natural se define como: $f(x) = \ln x$

$f'(x) = 1/x$ → cada pequeño segmento recto de la gráfica **de $\ln x$** tiene una **pendiente de $1/x$**





RECORDATORIO: Propiedades de los logaritmos

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

Sea u una función derivable en x.

1. $\dfrac{d}{dx}[\ln x] = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

2. $\dfrac{d}{dx}[\ln u] = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u'}{u}, \quad u > 0$

Ejemplo: Derivar $f(x) = \ln \dfrac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}$

$$f(x) = \ln x + 2\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2x^3-1)$$ Reescribir antes de derivar.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{6x^2}{2x^3-1}\right)$$ Derivar.

$$= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3-1}$$ Simplificar.

NOTA : El logaritmo natural no está definido para números negativos → $\dfrac{d}{dx}[\ln|u|] = \dfrac{u'}{u}$

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN INVERSA

Una función g es la **función inversa** de la función f si

$$f(g(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } g$$

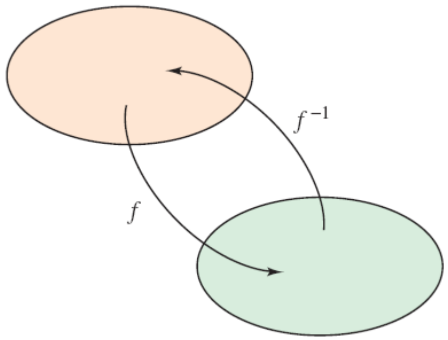
y

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f.$$

La función g se denota por f^{-1} (se lee como "inversa de f").

Acerca de las funciones inversas…

1. Si g es una función inversa de f, entonces f es la función inversa de g
2. El dominio de f^{-1} es igual al rango de f y el recorrido o rango de f^{-1} es igual que el dominio de f
3. Una función f puede no tener inversa, pero si la tiene (f es inyectiva), la función inversa es única



Dominio de f = recorrido o rango de f^{-1}
Dominio de f^{-1} = recorrido o rango de f

CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE LAS FUNCIONES INVERSAS

Sea f una función cuyo dominio es un intervalo I. Si f tiene una función inversa, entonces los siguientes enunciados son verdaderos.

1. Si f es continua en su dominio, entonces f^{-1} es continua en su dominio.
2. Si f es creciente en su dominio, entonces f^{-1} es creciente en su dominio.
3. Si f es decreciente en su dominio, entonces f^{-1} es decreciente en su dominio.
4. Si f es derivable en c y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$.

LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si f tiene una función inversa g, entonces g es derivable para todo x tal que $f'(g(x)) \neq 0$. Además,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0.$$

Ejemplo: Cálculo de la derivada de una función inversa

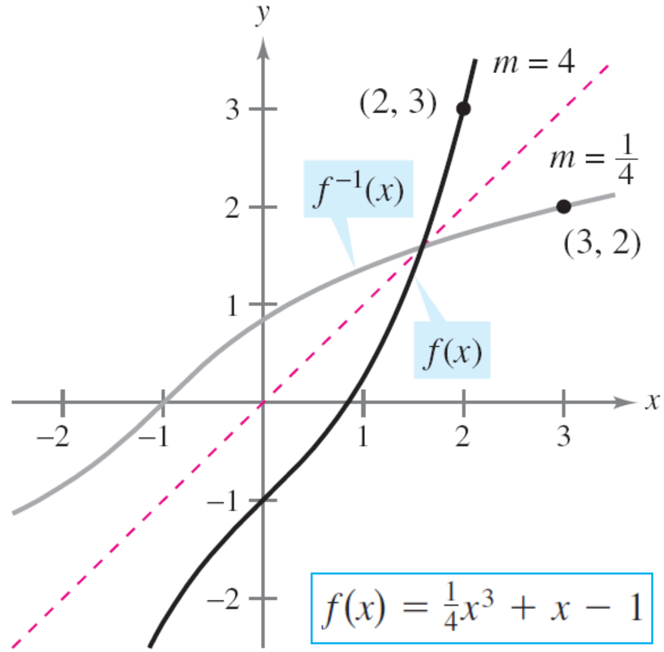
¿Cuál es el valor de $f^{-1}(3)$? ¿Cuál es el valor de $f^{-1\prime}(3)$?

f es inyectiva → f tiene inversa

- Como $f(x) = 3$ cuando $x = 2$, se sabe que $f^{-1}(3) = 2$
- Como la función f es derivable y tiene inversa:

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(2)}$$

$$f'(x) = \tfrac{3}{4}x^2 + 1 \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{3}{4}(2^2) + 1} = \frac{1}{4}$$



Las gráficas de las funciones inversas f y f^{-1} tienen pendientes recíprocas en los puntos (a, b) y (b, a)

NOTA:

- Si $y = g(x) = f^{-1}(x)$ entonces $f(y) = x$ y $f'(y) = dx/dy$
- Como $g'(x) = dy/dx = 1/f'(g(x)) = 1/f'(y) = 1/(dx/dy)$, por lo que: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}$

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La función inversa de la función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ se llama **función exponencial natural** y se denota por

$$f^{-1}(x) = e^x.$$

Esto es,

$$y = e^x \text{ si y sólo si } x = \ln y.$$

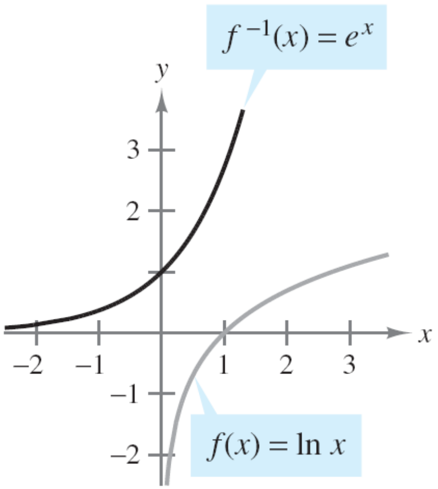
$\ln(e^x) = x$ y $e^{\ln x} = x$

RECORDATORIO: Operaciones con funciones exponenciales

- Sean *a* y *b* dos números reales arbitrarios

1. $e^a e^b = e^{a+b}$

2. $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$



DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Si u es una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x$

2. $\dfrac{d}{dx}[e^u] = e^u \dfrac{du}{dx}$

Ejemplo: Derivación de funciones exponenciales

a) $\dfrac{d}{dx}[e^{2x-1}] = e^u \dfrac{du}{dx} = 2e^{2x-1}$ $\qquad u = 2x - 1$

b) $\dfrac{d}{dx}[e^{-3/x}] = e^u \dfrac{du}{dx} = \left(\dfrac{3}{x^2}\right)e^{-3/x} = \dfrac{3e^{-3/x}}{x^2}$ $\qquad u = -\dfrac{3}{x}$

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL BASE *a*

Si a es un número real positivo ($a \neq 1$) y x es cualquier número real, entonces la **función exponencial base *a*** se denota por a^x y se define como

$$a^x = e^{(\ln a)x}.$$

Si $a = 1$, entonces $y = 1^x = 1$ es una función constante.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE *a*

Si a es un número real positivo ($a \neq 1$) y x es cualquier número real positivo, entonces la **función logarítmica base *a*** se denota $\log_a x$ y se define como

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x.$$

DERIVADAS PARA OTRAS BASES

Sean a un número real positivo ($a \neq 1$) y u una función derivable de x.

1. $\dfrac{d}{dx}[a^x] = (\ln a)a^x$

2. $\dfrac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u \dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}[\log_a x] = \dfrac{1}{(\ln a)x}$

4. $\dfrac{d}{dx}[\log_a u] = \dfrac{1}{(\ln a)u} \dfrac{du}{dx}$

Ejemplo: Derivadas de funciones de base distinta a *e*

a) $y = 2^x \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{d}{dx}[2^x] = (\ln 2)2^x$

b) $y = 2^{3x} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{d}{dx}[2^{3x}] = (\ln 2)2^{3x}(3) = (3 \ln 2)2^{3x}$

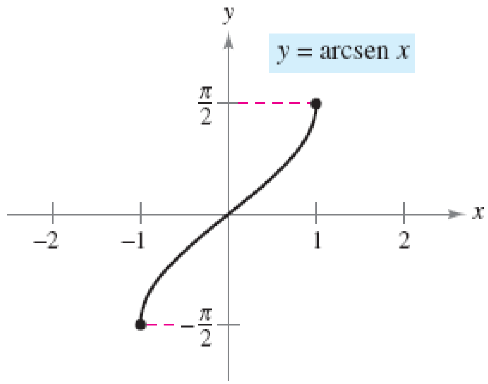
c) $y = \log_{10} \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{d}{dx}[\log_{10} \cos x] = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{(\ln 10)\cos x} = -\dfrac{1}{\ln 10} \tan x$

Las seis funciones trigonométricas NO SON INYECTIVAS → NO TIENEN INVERSA

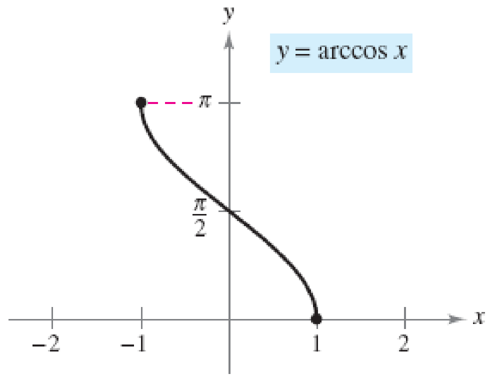
SOLUCIÓN: encontrar un dominio restringido en el que puedan tener inversa

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

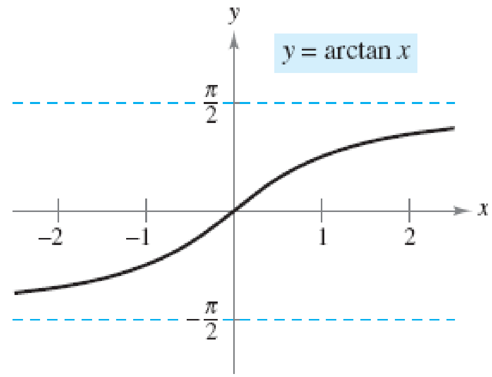
Función	*Dominio*	*Recorrido o rango*
$y = \operatorname{arcsen} x$ si y sólo si $\operatorname{sen} y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$ si y sólo si $\cos y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x$ si y sólo si $\tan y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccot} x$ si y sólo si $\cot y = x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
$y = \operatorname{arcsec} x$ si y sólo si $\sec y = x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$0 \leq y \leq \pi, \quad y \neq \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccsc} x$ si y sólo si $\csc y = x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad y \neq 0$



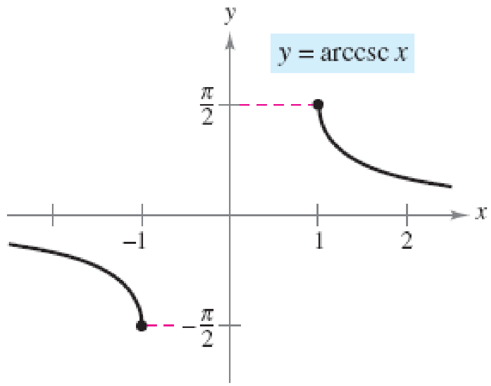
Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido o rango: $[-\pi/2, \pi/2]$



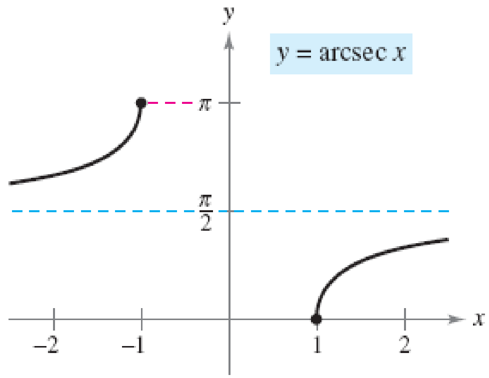
Dominio: $[-1, 1]$
Recorrido o rango: $[0, \pi]$



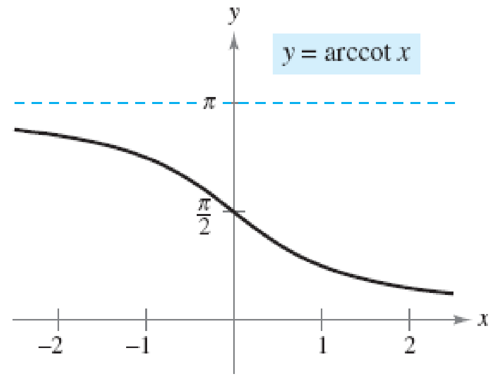
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\pi/2, \pi/2)$



Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido o rango: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$



Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Recorrido o rango: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(0, \pi)$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si u es una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

Ejemplo: Derivación de funciones trigonométricas inversas

a) $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen}(2x)] = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

b) $\frac{d}{dx}[\arctan(3x)] = \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2}$

c) $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen}\sqrt{x}] = \frac{(1/2)\,x^{-1/2}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

d) $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} e^{2x}] = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{(e^{2x})^2-1}} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}} = \frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

RESUMEN de las reglas básicas de derivación de funciones elementales: funciones algebraicas + funciones trascendentes

1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$	**2.** $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$	**3.** $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$	**5.** $\frac{d}{dx}[c] = 0$	**6.** $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$
7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$	**8.** $\frac{d}{dx}[\lvert u\rvert] = \frac{u}{\lvert u\rvert}(u'), \quad u \neq 0$	**9.** $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$
10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u\, u'$	**11.** $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$	**12.** $\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$
13. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = (\cos u)u'$	**14.** $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\operatorname{sen} u)u'$	**15.** $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$
16. $\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$	**17.** $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$	**18.** $\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$
19. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} u] = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	**20.** $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	**21.** $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1 + u^2}$
22. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1 + u^2}$	**23.** $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2 - 1}}$	**24.** $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2 - 1}}$

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad x \neq 0$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x}, \quad x \neq 0$$

Identidades hiperbólicas

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad \operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1 \qquad \operatorname{senh}(x-y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1 \qquad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

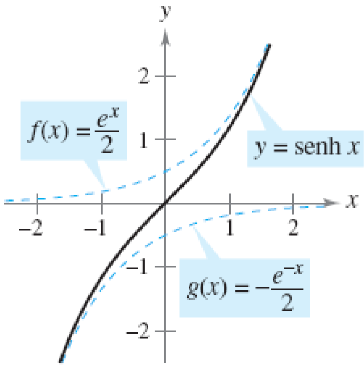
$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{-1 + \cosh 2x}{2} \qquad \cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$$

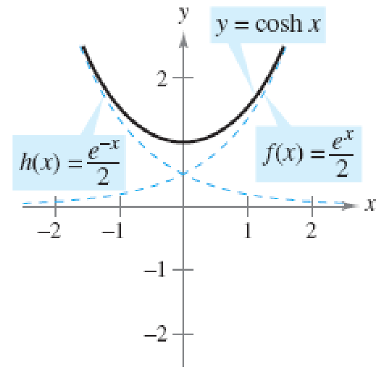
$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

CEU Universidad San Pablo

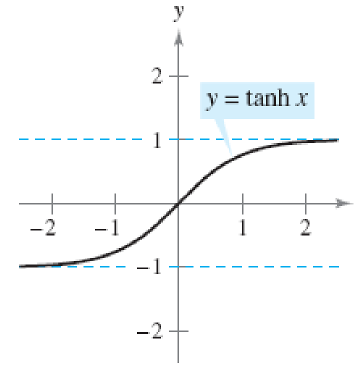
Derivación de funciones trascendentes:
Funciones hiperbólicas II



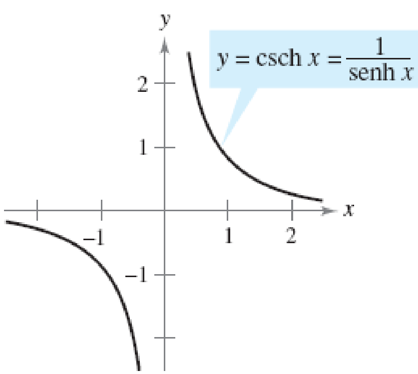
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



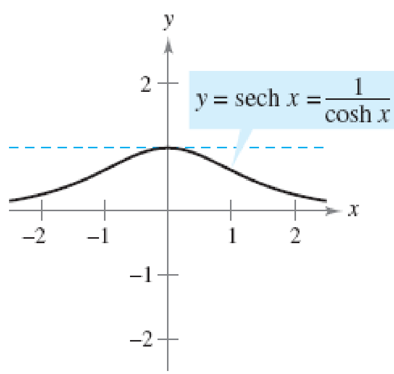
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $[1, \infty)$



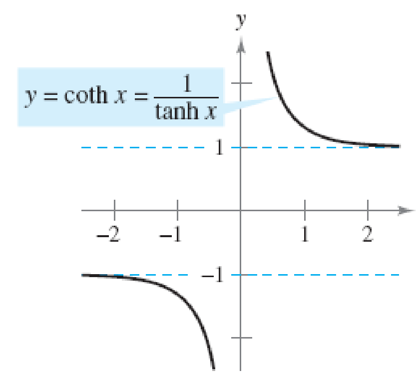
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-1, 1)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(0, 1]$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Sea u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh} u] = (\cosh u)u' \qquad \frac{d}{dx}[\coth u] = -(\operatorname{csch}^2 u)u'$$

$$\frac{d}{dx}[\cosh u] = (\operatorname{senh} u)u' \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{sech} u] = -(\operatorname{sech} u \tanh u)u'$$

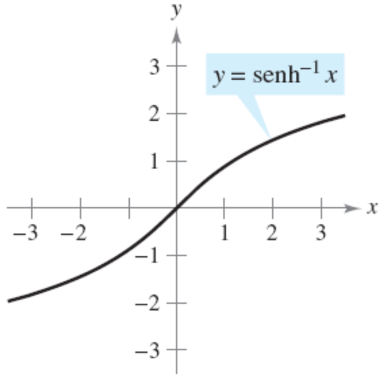
$$\frac{d}{dx}[\tanh u] = (\operatorname{sech}^2 u)u' \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{csch} u] = -(\operatorname{csch} u \coth u)u'$$

Ejemplo:

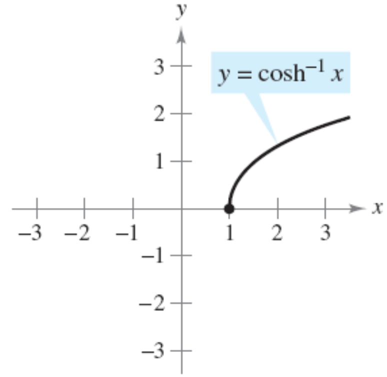
a) $\frac{d}{dx}[\operatorname{senh}(x^2 - 3)] = 2x\cosh(x^2 - 3)$ **b)** $\frac{d}{dx}[\ln(\cosh x)] = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \tanh x$

c) $\frac{d}{dx}[x \operatorname{senh} x - \cosh x] = x\cosh x + \operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x = x\cosh x$

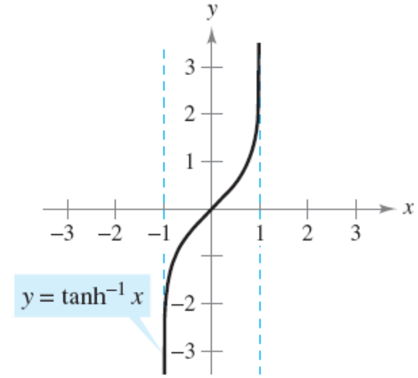
Derivación de funciones trascendentes:
Funciones hiperbólicas IV



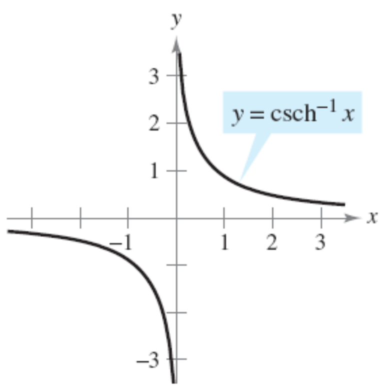
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



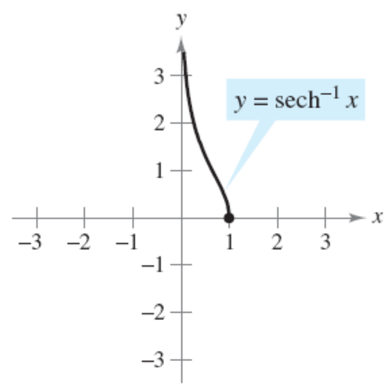
Dominio: $[1, \infty)$
Recorrido o rango: $[0, \infty)$



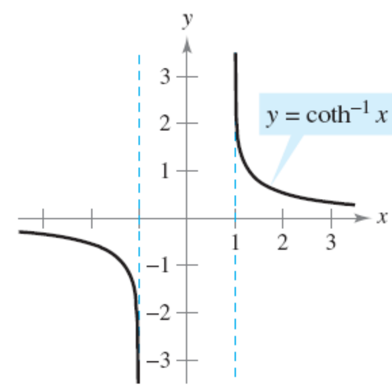
Dominio: $(-1, 1)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dominio: $(0, 1]$
Recorrido o rango: $[0, \infty)$



Dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Sea u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{senh}^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}} \qquad \frac{d}{dx}[\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1-u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\coth^{-1} u] = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}$$

Ejemplo:

$$y = a\operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} \qquad \boxed{a = 20}$$

$$y' = \frac{d}{dx}\left[20\operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{20} - \sqrt{20^2-x^2}\right] = -20\left(\frac{1}{20}\right)\left[\frac{1}{(x/20)\sqrt{1-(x/20)^2}}\right] - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2x}{\sqrt{20^2-x^2}}\right)$$

$$= \frac{-20^2}{x\sqrt{20^2-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{20^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{20^2-x^2}}{x}$$

Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital

A veces, al **evaluar límites**, nos encontramos con ***formas indeterminadas*** **→ no garantizan que un límite existe, ni indican el valor del límite, si éste existe**

¿Cómo resolver estas formas indeterminadas?

1. Funciones algebraicas → técnicas algebraicas
2. Funciones algebraicas y trascendentes mezcladas → regla de L'Hôpital

LA REGLA DE L'HÔPITAL

Sea f y g funciones que son derivables en un intervalo abierto (a, b) conteniendo c, excepto posiblemente el propio c. Asumir que $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b), excepto posiblemente el propio c. Si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c produce la forma indeterminada $0/0$, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

suponiendo que el límite en la derecha existe (o es infinito). Este resultado también aplica si el límite de $f(x)/g(x)$ como x tiende a c produce cualquiera de las formas indeterminadas ∞/∞, $(-\infty)/\infty$, $\infty/(-\infty)$, o $(-\infty)/(-\infty)$.

Ejemplo: Aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$$

Resultado de la sustitución directa: ∞/∞ → se aplica la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{d}{dx}[x^2]}{\frac{d}{dx}[e^{-x}]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}$$

Este límite da la forma indeterminada $(-\infty)/(-\infty)$ → se aplica de nuevo la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{d}{dx}[2x]}{\frac{d}{dx}[-e^{-x}]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

Si encontramos **formas indeterminadas** de los tipos $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty$ y ∞^0 es necesario **intentar reescribir el límite** o utilizar otros **procedimientos con los que se obtengan formas indeterminadas de los tipos** $0/0, \infty/\infty$ **que permiten utilizar la regla de L'Hôpital**

Ejemplo: Resolución de un límite tomando logaritmos naturales y aplicando L'Hôpital

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln[1 + (1/x)]}{1/x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(-1/x^2)\{1/[1 + (1/x)]\}}{-1/x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1 + (1/x)} = 1 \Rightarrow y = e$$

NOTA: Las siguientes **formas** deben reconocerse como **"determinadas"**

$\infty + \infty \to \infty$	El límite es infinito positivo.
$-\infty - \infty \to -\infty$	El límite es infinito negativo.
$0^\infty \to 0$	El límite es cero.
$0^{-\infty} \to \infty$	El límite es infinito positivo.

CEU Universidad San Pablo

DEFINICIÓN DE EXTREMOS

Sea f definida sobre un intervalo I que contiene a c.

1. $f(c)$ es el **mínimo de f en I** si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en I.
2. $f(c)$ es el **máximo de f en I** si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en I.

Los mínimos y máximos de una función en un intervalo son los **valores extremos**, o simplemente **extremos**, de la función en el intervalo. El mínimo y el máximo de una función en un intervalo también reciben el nombre de **mínimo absoluto** y **máximo absoluto** en el intervalo.

EL TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo.

DEFINICIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

1. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un máximo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **máximo relativo** de f, o se podría afirmar que f tiene un **máximo relativo en** $(c, f(c))$.
2. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un mínimo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **mínimo relativo** de f, o se podría afirmar que f tiene un **mínimo relativo en** $(c, f(c))$.

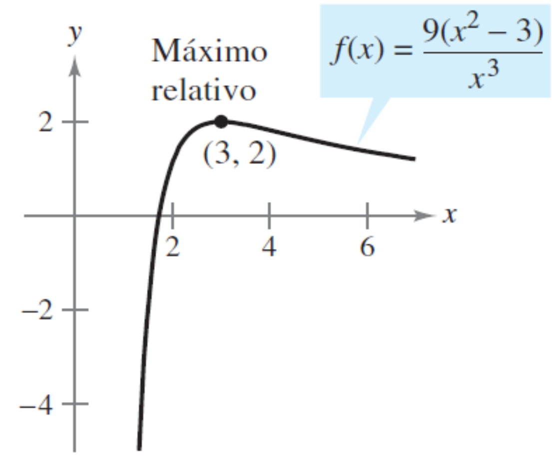
El plural de máximo relativo es máximos relativos, y el plural de mínimo relativo es mínimos relativos. Un máximo relativo y un mínimo relativo algunas veces son llamados **máximo local** y **mínimo local**, respectivamente.

Ejemplo: El valor de la derivada en los extremos relativos

a) $f(x) = \dfrac{9(x^2 - 3)}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{x^3(18x) - (9)(x^2 - 3)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{9(9 - x^2)}{x^4}$$

En el punto (3, 2), el valor de la derivada es $f'(3) = 0$

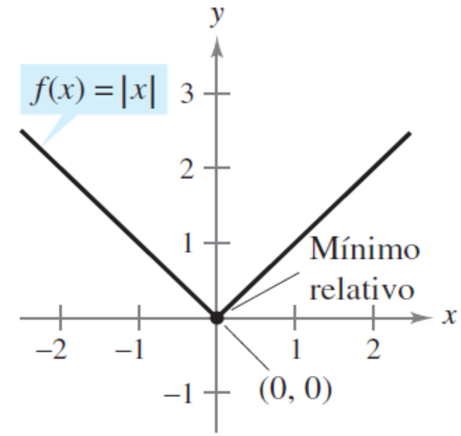


b) $f(x) = |x|$

En $x = 0$ la derivada de $f(x)$ no existe debido a que difieren los siguientes límites laterales:

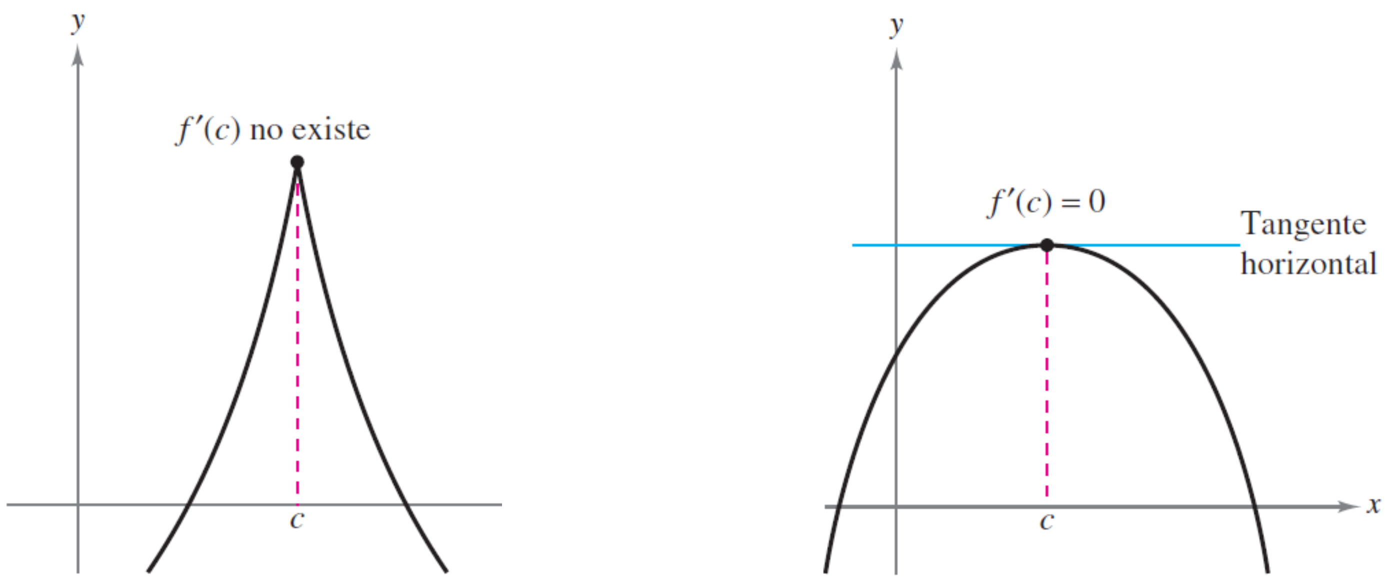
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$



DEFINICIÓN DE UN NÚMERO O PUNTO CRÍTICO

Sea f definida en c. Si $f'(c) = 0$ o si f no es derivable en c, entonces c es un **punto crítico** de f.



c es un punto crítico de f

LOS EXTREMOS RELATIVOS OCURREN SÓLO EN NÚMEROS O PUNTOS CRÍTICOS

Si f tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en $x = c$, entonces c es un punto crítico de f.

Demostración:

Caso 1: si *f* no es derivable en *x* = *c*, por definición *c* es un punto crítico de *f* → teorema es válido

Caso 2: si f es derivable en *x* = *c* entonces *f'*(*c*) debe ser positiva, negativa ó 0

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0, \text{ para todo } x \neq c \text{ en } (a, b)$$

Izquierda de c: $x < c$ y $f(x) < f(c)$ ⇒ $f(c)$ no es un mínimo relativo

Derecha de c: $x > c$ y $f(x) > f(c)$ ⇒ $f(c)$ no es un máximo relativo

La suposición de que *f'*(*c*) > 0 ó la de que *f'*(*c*) < 0 contradicen la hipótesis de que *f*(*c*) es un extremo relativo → *f'*(*c*) = 0 → por definición, *c* es un punto crítico de *f* → teorema válido

Estrategias para la determinación de extremos en un intervalo cerrado

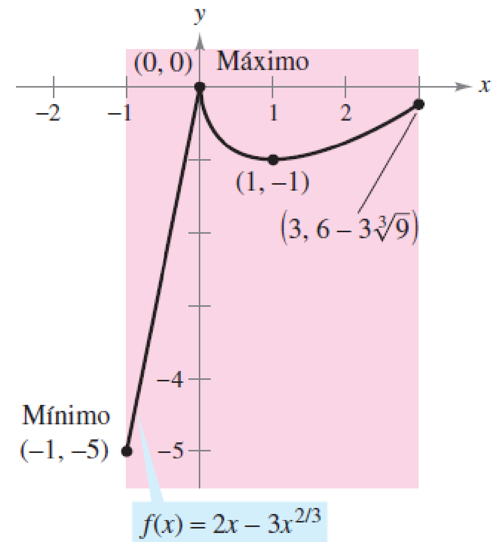
Para determinar los extremos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$, se siguen estos pasos.

1. Se encuentran los puntos críticos de f en (a, b).
2. Se evalúa f en cada punto crítico en (a, b).
3. Se evalúa f en cada punto extremo de $[a, b]$.
4. El más pequeño de estos valores es el mínimo. El más grande es el máximo.

Ejemplo: Encontrar los extremos de $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ en $[-1, 3]$

$$f(x) = 2x - 3x^{2/3} \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{2}{x^{1/3}} = 2\left(\frac{x^{1/3} - 1}{x^{1/3}}\right)$$

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(-1) = -5$ Mínimo	$f(0) = 0$ Máximo	$f(1) = -1$	$f(3) = 6 - 3\sqrt[3]{9} \approx -0.24$



TEOREMA DE ROLLE

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si

$$f(a) = f(b)$$

entonces existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Demostración: Sea $f(a) = d = f(b)$

Caso 1: Si $\boldsymbol{f(x) = d}$ **para todo** $\boldsymbol{x}$ **en** $\boldsymbol{[a,b]}$, f es constante en el intervalo, y por tanto, $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b)

Caso 2: Si $\boldsymbol{f(x) > d}$ **para algún** $\boldsymbol{x}$ **en** $\boldsymbol{(a, b)}$ entonces, por el teorema del valor extremo, se sabe que f tiene un máximo en algún punto c del intervalo. Como $f(c) > d$, este máximo no puede estar en los puntos terminales. Por tanto, f tiene un máximo en el intervalo abierto (a, b) por lo que $f(c)$ es un máximo relativo y c es un número crítico de f. Como f es derivable en c, se concluye que $f'(c) = 0$

Caso 3: Si $\boldsymbol{f(x) < d}$ **para algún** $\boldsymbol{x}$ **en** $\boldsymbol{(a, b)}$, se puede utilizar un argumento similar al del caso 2

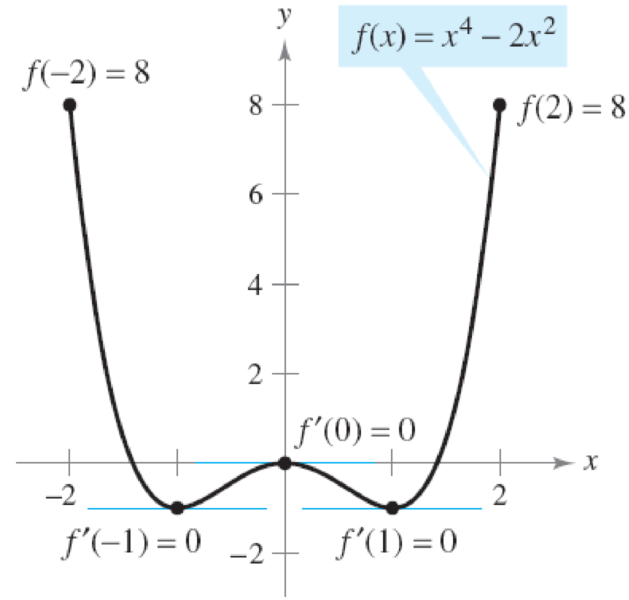
Ejemplo: Aplicación del teorema de Rolle

Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$. Determinar todos los valores de c en el intervalo (-2, 2) tal que $f'(c) = 0$

- f satisface las condiciones del teorema de Rolle → continua en [-2, 2], derivable en (-2, 2)
- Además $f(-2) = f(2) = 8$ → existe al menos una c en (-2, 2) tal que $f'(c) = 0$
- Igualando a cero la derivada se obtiene:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0$$
$$4x(x-1)(x+1) = 0$$
$$x = 0, 1, -1$$

$f'(x) = 0$ para más de un valor de x en el intervalo $(-2, 2)$



EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

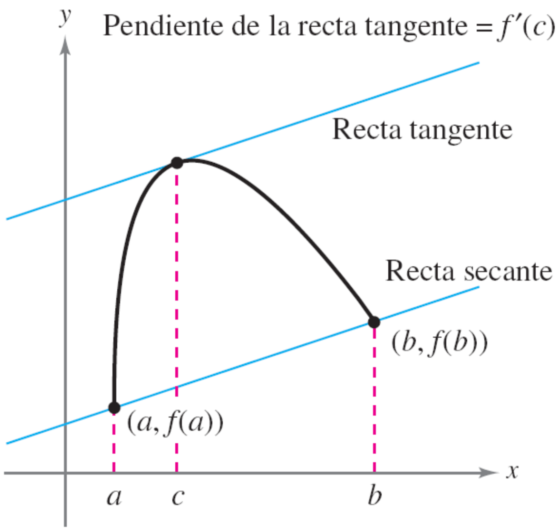
El término "medio" se refiere al ritmo de cambio medio de f en $[a, b]$

Demostración: Sea y = recta secante

$$g(x) = f(x) - y = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a)$$

$g(a) = g(b) = 0$. Como f es continua en [a, b] y derivable en (a, b) g también lo es → Se puede aplicar el teorema de Rolle a g:

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

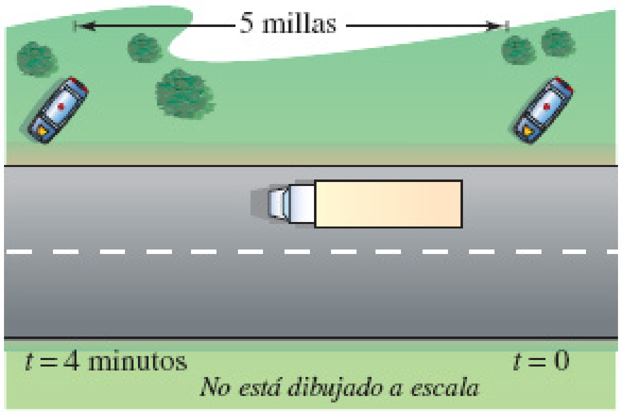


Ejemplo: determinación de ritmo de cambio instantáneo → radar de tramo

Dos patrullas equipadas con radar se encuentran a 5 millas de distancia. Cuando pasa un camión al lado de la primera se registra una velocidad de 55 millas/h. Cuatro minutos después, cuando el camión pasa al lado de la segunda, se registra 50 millas/h. Demostrar que el camión ha excedido el límite de velocidad (55 millas/h) en algún momento dentro de ese intervalo de cuatro minutos

- Sea $t = 0$ el tiempo (en horas) cuando el camión pasa al lado de la primera patrulla. El tiempo en el que el camión pasa al lado de la segunda es:

  $t = 4/60 = 1/15$ hora



- Si $s(t)$ representan la distancia (en millas) recorridas por el camión, entonces la velocidad promedio del camión sobre el tramo de cinco millas es:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{s(1/15) - s(0)}{(1/15) - 0} = \frac{5}{1/15} = 75 \text{ millas por hora}$$

Si asumimos que la función de posición de posición es derivable y aplicamos el teorema del valor medio → **en algún momento durante los 4 minutos se ha superado el límite de velocidad**

DEFINICIÓN DE FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

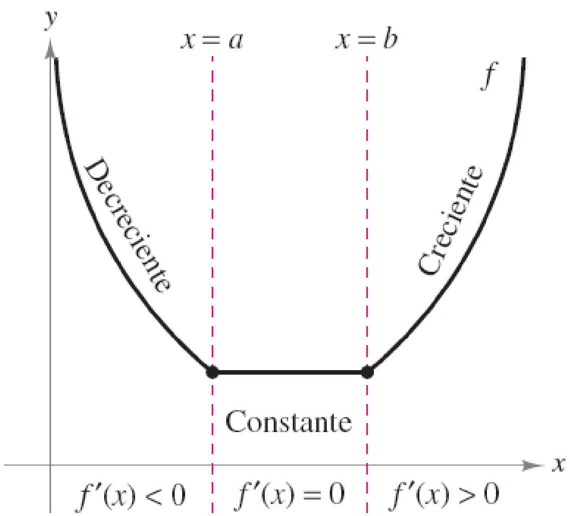
Una función f es **creciente** sobre un intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es **decreciente** sobre un intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$.

- Una función es **creciente** si, cuando **x se mueve hacia la derecha**, su **gráfica asciende** (derivada positiva)

- Una función es **decreciente** si, cuando **x se mueve a la derecha**, su **gráfica desciende** (derivada decreciente)

- Una función **no es creciente ni decreciente** (es constante) si, cuando **x se mueve al a derecha** su **gráfica ni asciende ni desciende** (derivada cero)



CRITERIO PARA LAS FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b) entonces f es decreciente en $[a, b]$.
3. Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b) entonces f es constante en $[a, b]$.

Demostración: Caso 1 → ***f'(x) > 0*** para todo x en el intervalo (a, b)

Sean $x_1 < x_2$ dos puntos cualesquiera del intervalo. Mediante el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c tal que $x_1 < c < x_2$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$ → $f(x_1) < f(x_2)$ → ***f* es creciente en el intervalo**

Estrategias para determinar los intervalos en los que una función es creciente o decreciente

Sea f continua en el intervalo (a, b). Para encontrar los intervalos abiertos sobre los cuales f es creciente o decreciente, hay que seguir los siguientes pasos.

1. Localizar los puntos críticos de f en (a, b), y utilizarlos para determinar intervalos de prueba.
2. Determinar el signo de $f'(x)$ en un valor de prueba en cada uno de los intervalos.
3. Determinar si f es creciente o decreciente para cada intervalo.

Estas estrategias también son válidas si el intervalo (a, b) se sustituye por un intervalo de la forma $(-\infty, b)$, (a, ∞) o $(-\infty, \infty)$.

NOTA: Una función es **estrictamente monótona** sobre un intervalo **si es creciente o decreciente en todo el intervalo**

Ejemplo: Intervalos sobre los cuales f es creciente y decreciente

$$f(x) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2$$

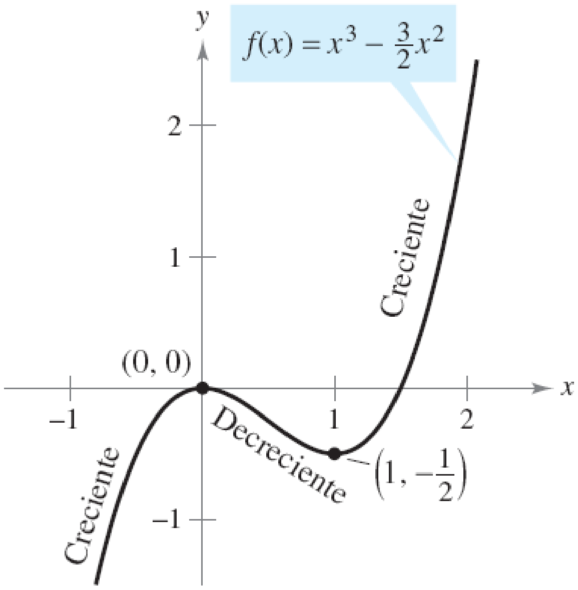
- f es derivable en toda la recta de los números reales
- Para determinar los puntos críticos de f, igualar a cero $f'(x)$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 \qquad \text{Escribir la función original.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 0 \qquad \text{Derivar e igualar } f'(x) \text{ a cero.}$$

$$3(x)(x-1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = 0, 1 \qquad \text{Puntos críticos.}$$



- Como no hay puntos para los cuales f' no exista → $x = 0$ y $x = 1$ son los únicos puntos críticos

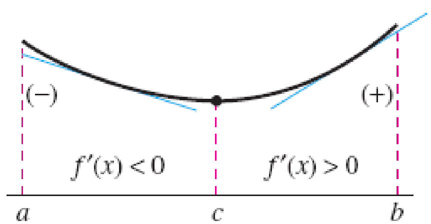
Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) = 6 > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = 6 > 0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

Funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada:
Criterio de la primera derivada

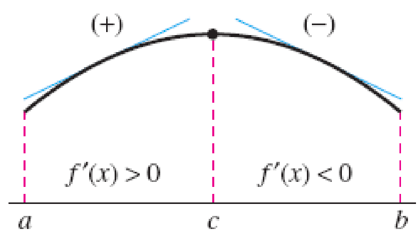
CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Sea c un punto crítico de una función f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en c, entonces $f(c)$ puede clasificarse como sigue.

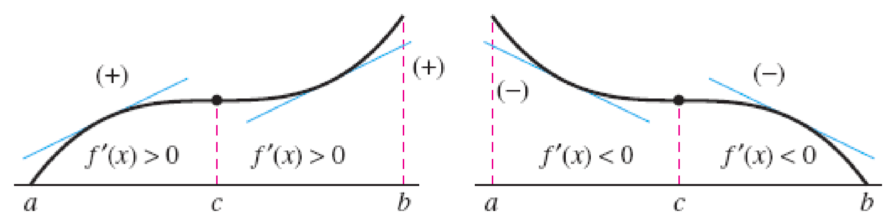
1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un *mínimo relativo* en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un *máximo relativo* en $(c, f(c))$.
3. Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo.



Mínimo relativo



Máximo relativo



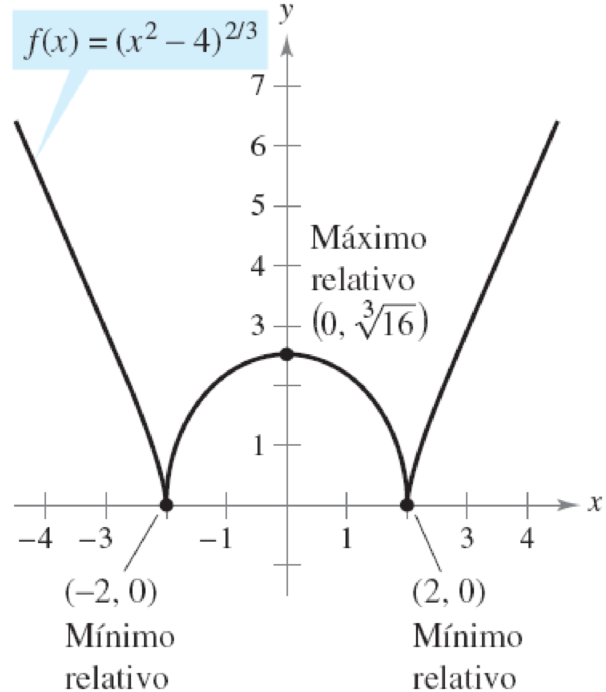
Ni mínimo relativo ni máximo relativo

Ejemplo: Aplicación del criterio de la primera derivada

Encontrar los extremos relativos de $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

- Observamos que f es continua en toda la recta real
- Derivada de f: $f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3}(2x) = \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}}$
  - $f'(0) = 0$
  - La derivada no existe cuando $x = -2$ ni cuando $x = 2$

    Puntos críticos: $x = -2, 0, 2$



Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

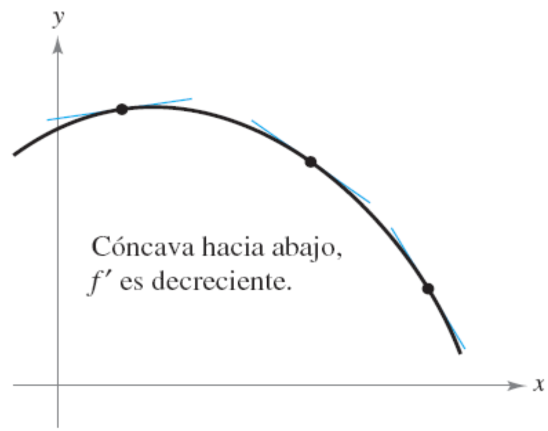
Se puede aplicar el criterio de la primera derivada para encontrar los extremos relativos

Localizar los intervalos en los que *f'* es creciente o decreciente puede utilizarse para **determinar** dónde **la gráfica de *f se curva hacia arriba* o *se curva hacia abajo***

DEFINICIÓN DE CONCAVIDAD

Sea f derivable en un intervalo abierto I. La gráfica de f es **cóncava hacia arriba** sobre I si f' es creciente en el intervalo y **cóncava hacia abajo** en I si f' es decreciente en el intervalo.

a) La gráfica de *f* se encuentra sobre sus rectas tangentes



b) La gráfica de *f* se encuentra debajo de sus rectas tangentes

CEU Universidad San Pablo

CRITERIO DE CONCAVIDAD

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

Para aplicar este teorema, es necesario seguir la siguiente ESTRATEGIA:

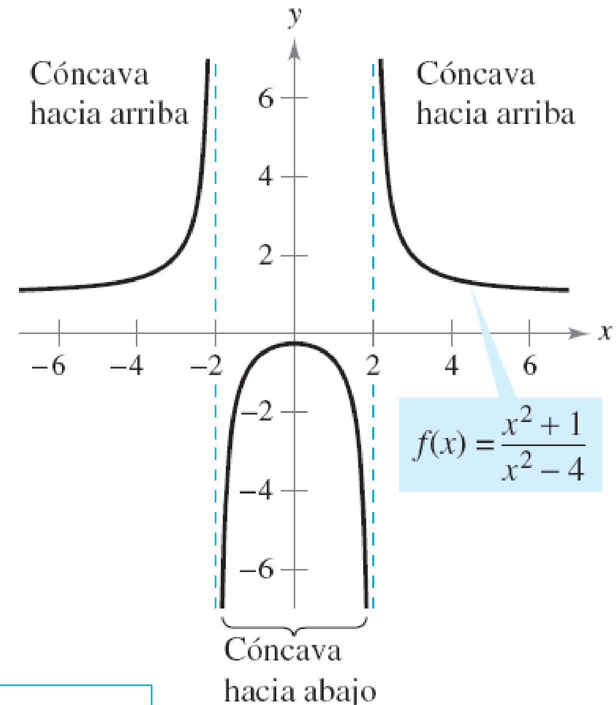
1. Localizar los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ ó $f''(x)$ no existe
2. Usar los valores de x para determinar los intervalos de prueba
3. Probar el signo de $f''(x)$ en cada uno de los intervalos de prueba

Ejemplo: Determinación de la concavidad

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4)(2x) - (x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4)^2(-10) - (-10x)(2)(x^2 - 4)(2x)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

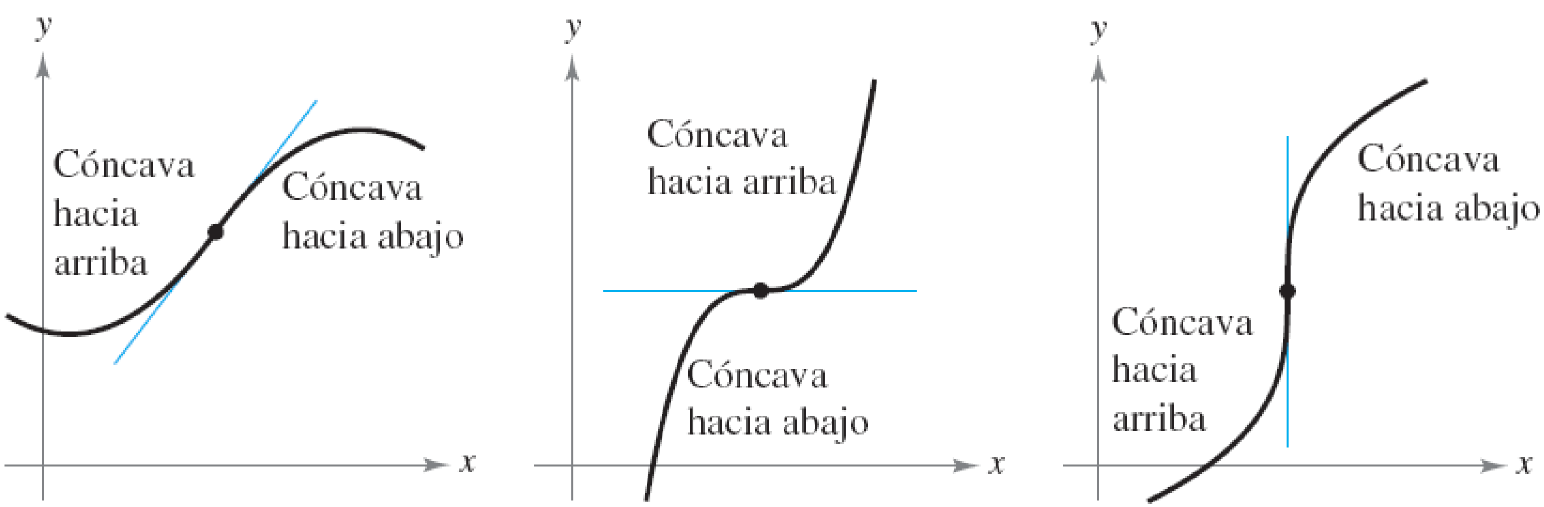


No hay puntos en los cuales *f''*(x) = 0, pero en x = -2 y en x = -2 *f* no es continua, por lo que:

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-3) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

DEFINICIÓN DE PUNTO DE INFLEXIÓN

Sea f una función que es continua en un intervalo abierto y sea c un punto en ese intervalo. Si la gráfica de f tiene una recta tangente en este punto $(c, f(c))$, entonces este punto es un **punto de inflexión** de la gráfica de f si la concavidad de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba) en ese punto.



PUNTO DE INFLEXIÓN

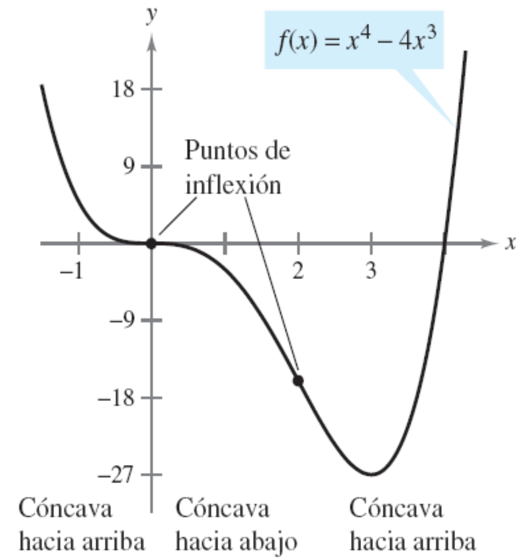
Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(c) = 0$ o f'' no existe en $x = c$.

Ejemplo: Determinación de los puntos de inflexión de $f(x) = x^4 - 4x^3$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

$f''(x) = 0$ → puntos de inflexión posibles: $x = 0$ y $x = 2$

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(3) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba



Tras analizar los intervalos se puede concluir que **tanto *x* = 0 como *x* = 2 son puntos de inflexión**

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c.

1. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.
2. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.

Si $f''(c) = 0$, entonces el criterio falla. Esto es, f quizá tenga un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos. En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada.

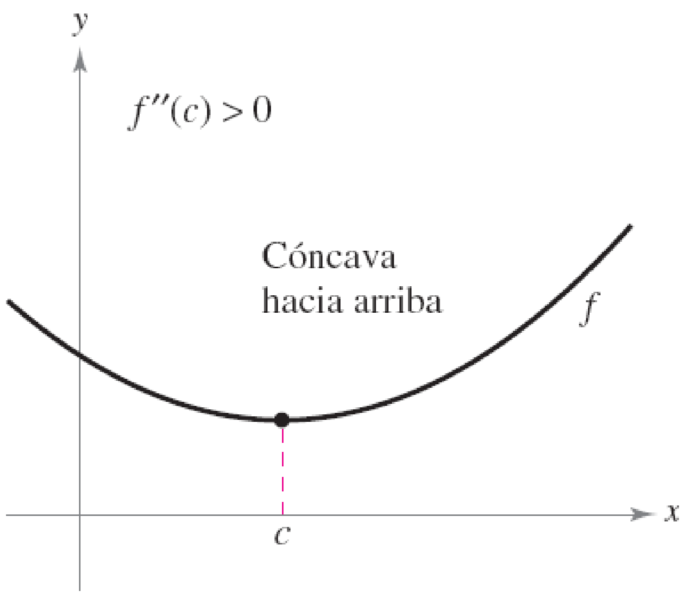
Demostración:

Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, existe un intervalo abierto I que contiene a c para el cual $\dfrac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = \dfrac{f'(x)}{x-c} > 0$

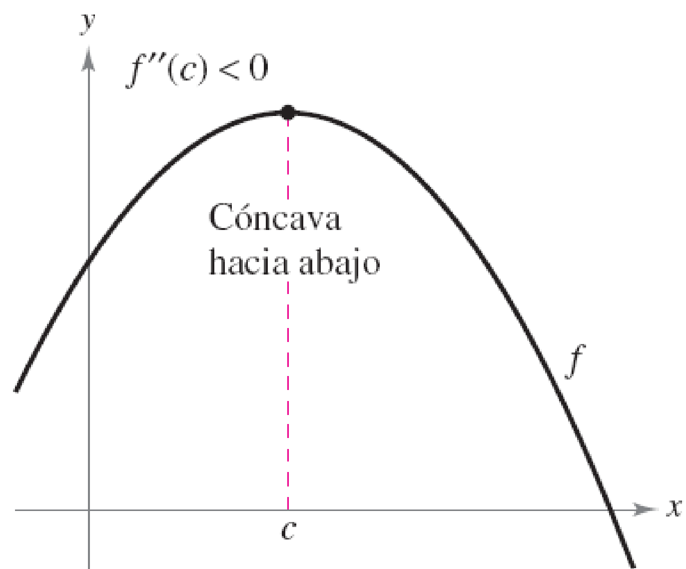
Para todo $x \neq c$ en I. Si $x < c$, entonces $x - c < 0$ y $f'(x) < 0$. Además, si $x > c$, entonces $x - c > 0$ y $f'(x) > 0$. De tal modo, $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c y el criterio de la primera derivada implica que $f(c)$ es un mínimo relativo

NOTA: la demostración del segundo caso se puede llevar a cabo con un razonamiento similar

Por tanto, además de cómo método para analizar la concavidad, es posible **utilizar la segunda derivada** para efectuar una **prueba de máximos y mínimos relativos**



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un mínimo relativo



Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un máximo relativo

Ejemplo: Empleo del criterio de la segunda derivada

Encontrar los extremos relativos correspondientes a $f(x) = -3x^5 + 5x^3$

En primer lugar se determinan los puntos críticos de f

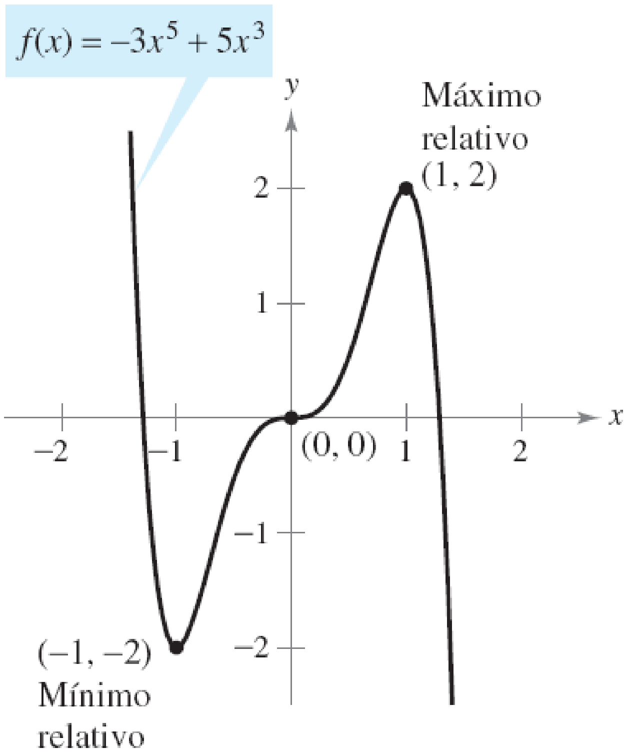
$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2) = 0$$

$$x = -1, 0, 1$$

Posteriormente, se aplica el criterio de la segunda derivada

$$f''(x) = -60x^3 + 30x = 30(-2x^3 + x)$$

Punto	$(-1, -2)$	$(1, 2)$	$(0, 0)$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(0) = 0$
Conclusión	Mínimo relativo	Máximo relativo	Falla de la prueba



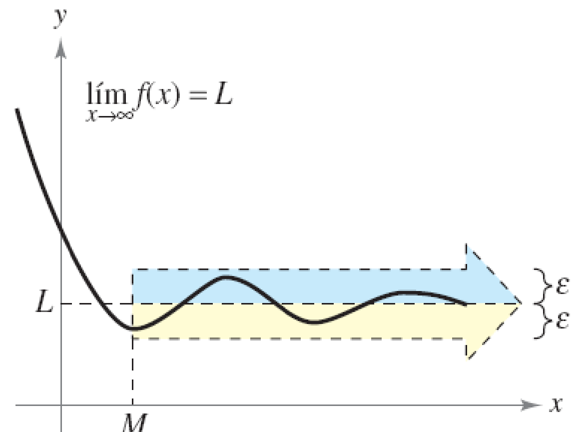
En el punto (0, 0) el criterio de la primera derivada indica que (0 , 0) no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo

DEFINICIÓN DE LÍMITES AL INFINITO

Sea L un número real.

1. El enunciado $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > M$.
2. El enunciado $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < N$.

Para un número positivo dado ε existe un número positivo M tal que, para $x > M$, la gráfica de f estará entre las rectas horizontales dadas por $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$



$f(x)$ está dentro de ε unidades de L cuando $x \to \infty$

Ejemplo: Límites en el infinito de f(x)

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$$

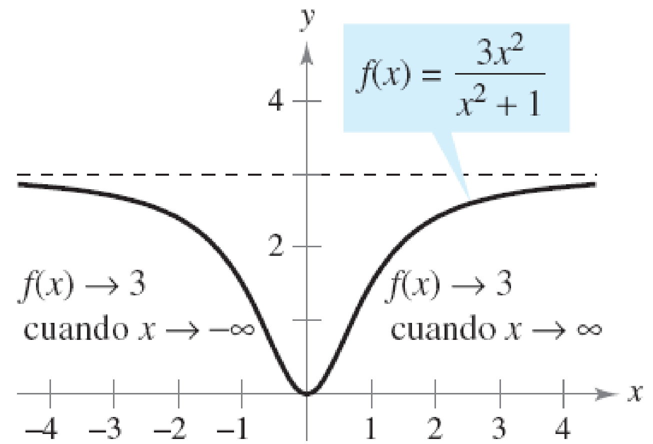
x decrece sin límite. | *x* crece sin límite.

x	$-\infty \leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\rightarrow \infty$
$f(x)$	$3 \leftarrow$	2.9997	2.97	1.5	0	1.5	2.97	2.9997	$\rightarrow 3$

f(*x*) se aproxima a 3. | *f*(*x*) se aproxima a 3.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$ Límite en infinito negativo.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$$ Límite en infinito positivo.



El límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ o ∞ es 3

DEFINICIÓN DE UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL

La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

NOTA: a partir de esta definición se concluye que **la gráfica de una función de *x* puede tener como mucho dos asíntotas horizontales** (una hacia la derecha y otra hacia la izquierda)

Para **evaluar límites en el infinito**, resulta útil el siguiente **teorema:**

LÍMITES AL INFINITO

Si r es un número racional positivo y c es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Además, si x^r se define cuando $x < 0$, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Ejemplo: Determinación de un límite al infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1}$$

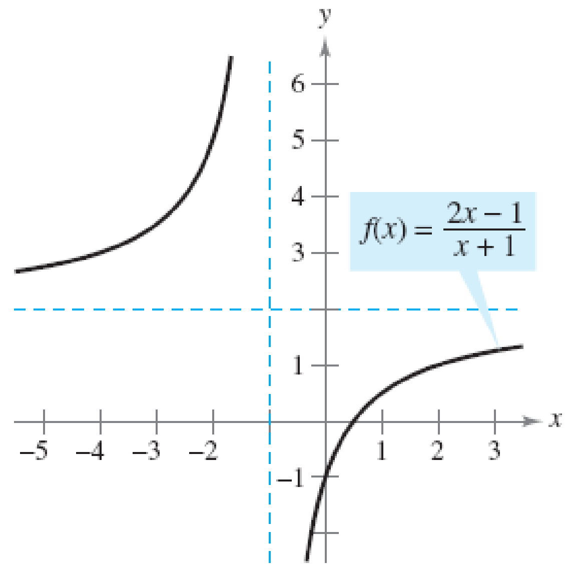
$$\lim_{x\to\infty} (2x-1) \to \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} (x+1) \to \infty$$

forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x-1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$



$y = 2$ es una asíntota horizontal

Estrategia para determinar límites en $\pm\infty$ de funciones racionales

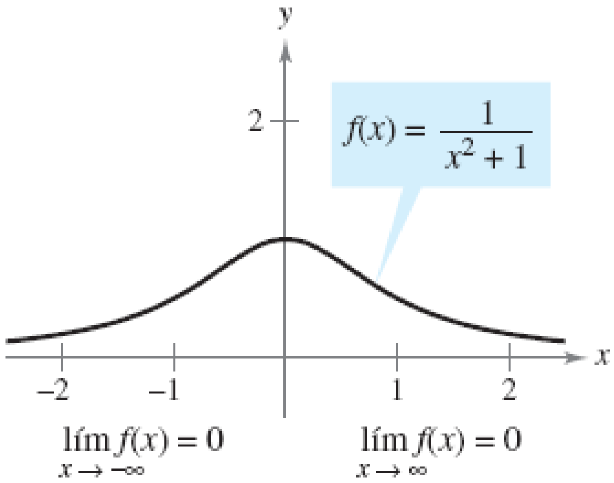
1. Si el grado del numerador es *menor que* el grado de denominador, entonces el límite de la función racional es 0.
2. Si el grado del numerador es *igual al* grado de denominador, entonces el límite de la función racional es el cociente de los coeficientes dominantes.
3. Si el grado del numerador es *mayor que* el grado del denominador, entonces el límite de la función racional no existe.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito es 0 porque el grado del denominador supera al del numerador

NOTA: Las funciones racionales tienden a la misma asíntota horizontal hacia la derecha que hacia la izquierda



Si **en vez de funciones racionales** tenemos **funciones algebraicas y trascendentes mezcladas** es posible que sea necesario **utilizar la regla de L'Hôpital para evaluar los límites al infinito**

En este caso, la regla de L'Hôpital se establece de la siguiente manera:

Si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a ∞ (o $-\infty$) produce la forma indeterminada $0/0$ si ∞/∞, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

suponiendo que el límite de la derecha existe.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}[\ln x]}{\frac{d}{dx}[x]} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ **y = 0 es una asíntota horizontal**

Muchas funciones no tienden a un límite finito cuando *x* crece (o decrece) sin límite:

DEFINICIÓN DE LÍMITES INFINITOS AL INFINITO
Sea f una función definida en el intervalo (a, ∞). **1.** El enunciado $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ significa que para cada número positivo M, existe un número correspondiente $N > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $x > N$. **2.** El enunciado $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ significa que para cada número negativo M, existe un número correspondiente $N > 0$ tal que $f(x) < M$ siempre que $x > N$.

Pueden darse definiciones similares para los enunciados:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Ejemplo: Determinación de límites infinitos al infinito

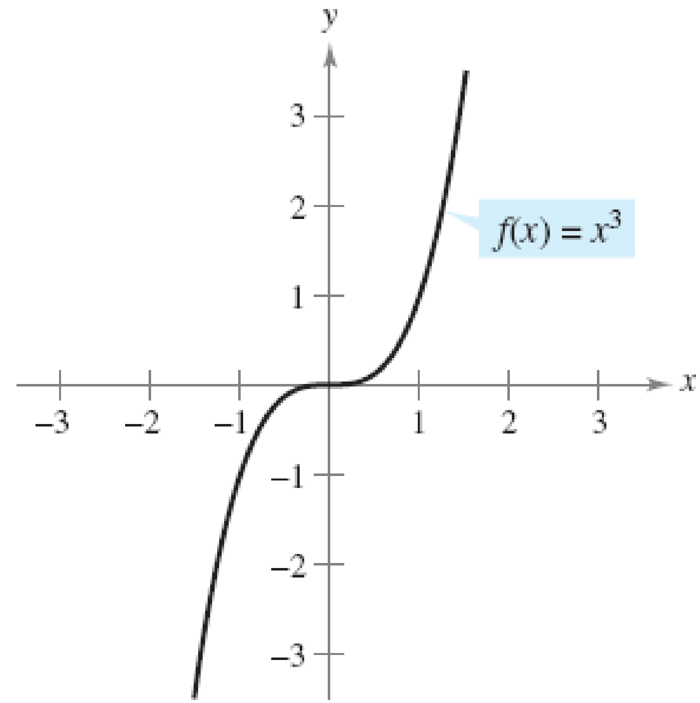
a) $\lim\limits_{x \to \infty} x^3$ ***b)*** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$

a) Cuando x crece sin límite, x^3 también crece sin límite, por tanto:

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

b) Cuando x decrece sin límite, x^3 también decrece sin límite, por tanto:

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$



NOTA: los resultados deben concordar con los que se obtienen si se aplica el criterio del coeficiente dominante para funciones polinómicas

La importancia de las gráficas en matemáticas…

"Mientras el álgebra y la geometría recorrieron caminos independientes, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Sin embargo, cuando estas dos ciencias se unieron, extrajeron una de la otra una fresca vitalidad, y a partir de ahí marcharon a gran velocidad hacia la perfección"

Lagrange

Estrategia para analizar la gráfica de una función

1. Determinar el dominio y el rango de la función.
2. Determinar las intersecciones, asíntotas y simetría de la gráfica.
3. Localizar los valores de x para los cuales $f'(x)$ y $f''(x)$ son cero o no existen. Usar los resultados para determinar extremos relativos y puntos de inflexión.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$$

Ejemplo: Dibujo de la gráfica de una función racional

Primera derivada: $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ ***Segunda derivada:*** $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3}$

Intersecciones en x: Ninguna ***Intersección en y:*** $(0, -2)$

Asíntota vertical: $x = 2$ ***Asíntotas horizontales:*** Ninguna

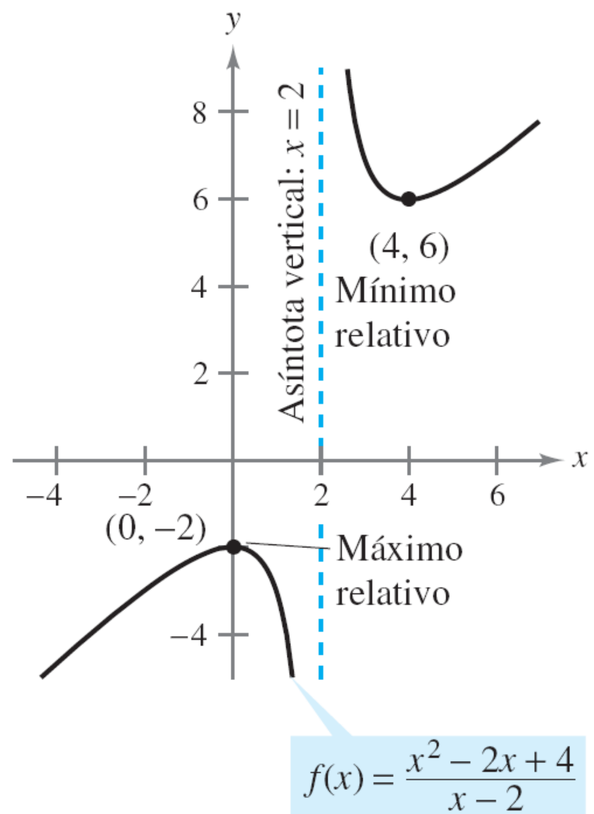
Comportamiento final o asintótico: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Puntos críticos: $x = 0, x = 4$

Dominio: Todos los números reales excepto $x = 2$

Intervalos de prueba: $(-\infty, 0), (0, 2), (2, 4), (4, \infty)$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	-2	0	$-$	Máximo relativo
$0 < x < 2$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$2 < x < 4$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 4$	6	0	$+$	Mínimo relativo
$4 < x < \infty$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba



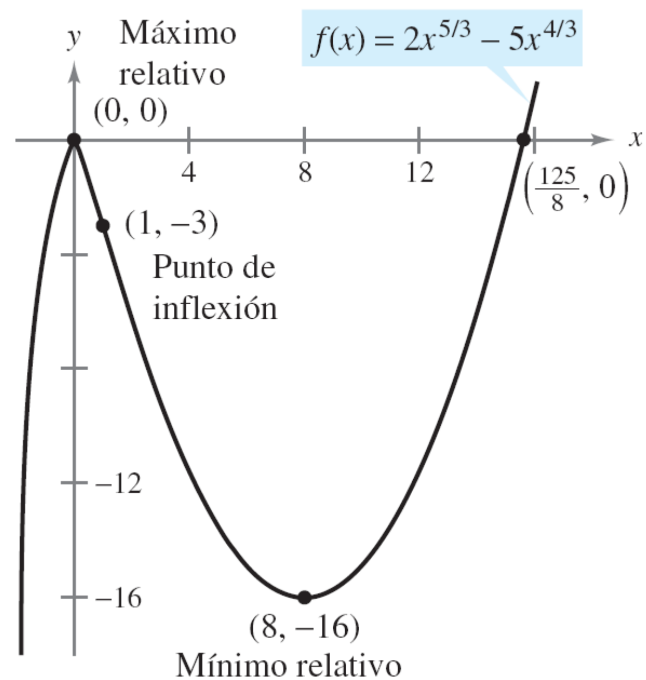
Ejemplo: Dibujo de la gráfica de una función radical

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{1/3}(x^{1/3} - 2) \qquad f''(x) = \frac{20(x^{1/3} - 1)}{9x^{2/3}}$$

$$\boxed{f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}}$$

- La función tiene dos intersecciones → (0, 0) y (125/8, 0)
- No hay asíntotas horizontales o verticales
- La función tiene dos puntos críticos (x = 0 y x = 8) y dos posibles puntos de inflexión (x = 0 y x = 1)
- El dominio son todos los números reales

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		+	−	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	0	Indef.	Máximo relativo
$0 < x < 1$		−	−	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = 1$	−3	−	0	Punto de inflexión
$1 < x < 8$		−	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 8$	−16	0	+	Mínimo relativo
$8 < x < \infty$		+	+	Creciente, cóncava hacia arriba



Ejemplo: Dibujo de la gráfica de una función trigonométrica

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Primera derivada: $f'(x) = -\frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$ ***Segunda derivada:*** $f''(x) = \frac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$

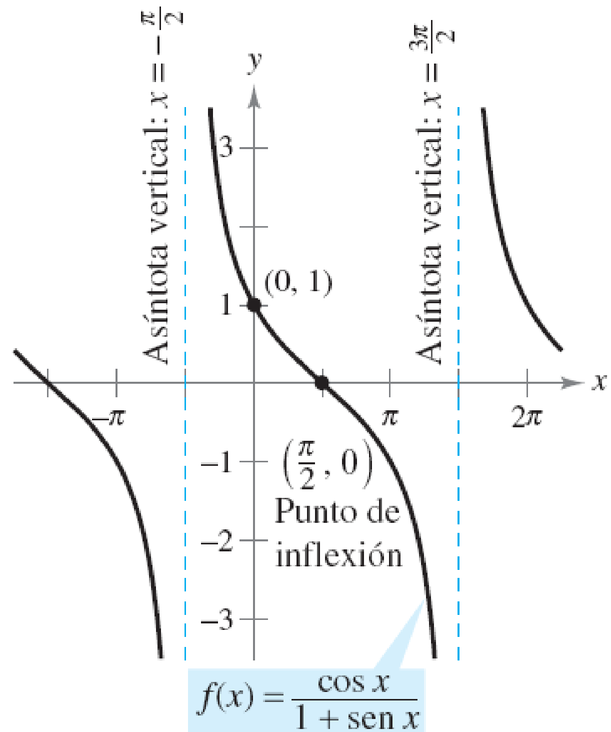
Periodo: 2π ***Intersección en x:*** $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ***Intersección en y:*** $(0, 1)$

Asíntotas verticales: $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ ***Asíntotas horizontales:*** Ninguna

Puntos críticos: Ninguno ***Posibles puntos de inflexión:*** $x = \frac{\pi}{2}$

Dominio: Todos los números reales excepto $x = \frac{3 + 4n}{2}\pi$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Características de la gráfica
$x = -\frac{\pi}{2}$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = \frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	Punto de inflexión
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = \frac{3\pi}{2}$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical



Estrategias para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos

1. Identificar todas las cantidades *dadas* y las que *se van a determinar*. Si es posible, elaborar un dibujo.
2. Escribir una **ecuación primaria** para la cantidad que se va a maximizar o minimizar.
3. Reducir la ecuación primaria a una que tenga una *sola variable independiente*. Esto quizá implique el uso de **ecuaciones secundarias** que relacionan las variables independientes de la ecuación primaria.
4. Determinar el dominio admisible de la ecuación primaria. Esto es, determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido.
5. Determinar el valor máximo o mínimo deseado mediante las técnicas de cálculo estudiadas

Ejemplo: Determinación de la distancia mínima

¿Qué puntos sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$ son más cercanos al punto (0, 2)?

Hay dos puntos a una distancia mínima del punto (0 , 2)

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} \quad \text{Ecuación primaria}$$

$$d = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

El dominio de f (o d) es toda la recta de los números reales

Determinación de los puntos críticos de f:

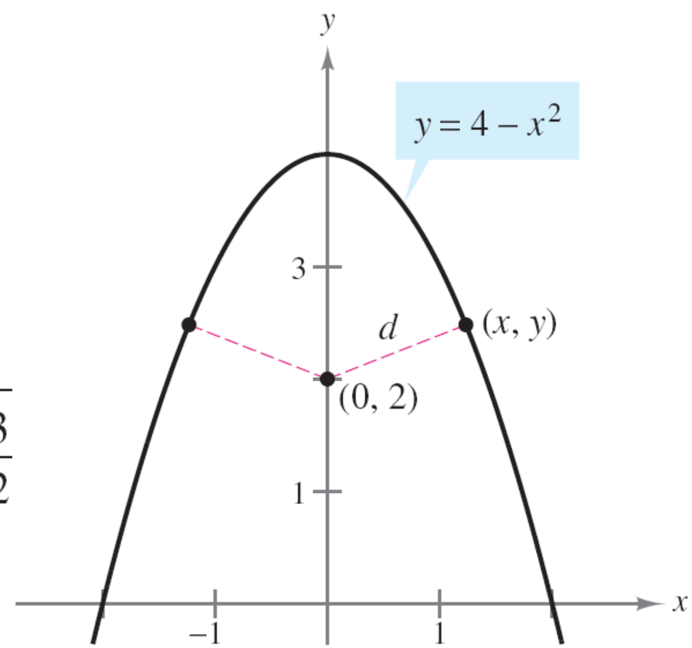
$$f'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Criterio de la primera derivada:

$x = 0$ produce un máximo relativo

$x = \sqrt{3/2}$ y $x = -\sqrt{3/2}$ producen una distancia mínima

Puntos más cercanos: $\left(\sqrt{3/2}, 5/2\right)$ y $\left(-\sqrt{3/2}, 5/2\right)$



La cantidad por minimizar es la distancia:
$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$.

Ejemplo: Un máximo en un punto terminal

Se van a usar cuatro pies de alambre (longitud) para formar un cuadrado y un círculo. ¿Qué cantidad de alambre debe usarse para el cuadrado y qué cantidad para el círculo a fin de abarcar la máxima área total?

Área total = A = área del cuadrado + área del círculo = $x^2 + \pi r^2$

4 (pies) = perímetro del cuadrado + circunferencia del círculo

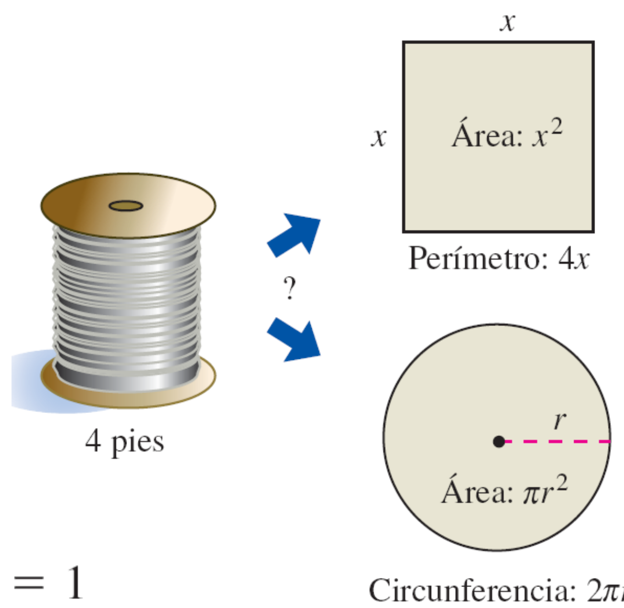
= $4x + 2\pi r \rightarrow r = 2(1 - x)/\pi$

$$A = x^2 + \pi\left[\frac{2(1-x)}{\pi}\right]^2 = x^2 + \frac{4(1-x)^2}{\pi} = \frac{1}{\pi}[(\pi + 4)x^2 - 8x + 4]$$

El dominio admisible es [0, 1]

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2(\pi + 4)x - 8}{\pi} \qquad A(0) \approx 1.273,\ A(0.56) \approx 0.56 \text{ y } A(1) = 1$$

El área máxima → x= 0 → todo el alambre se usa para el círculo



La cantidad que se va a maximizar es el área: $A = x^2 + \pi r^2$

Sabemos que **si una función es derivable en *c***, la **ecuación de la recta tangente en el punto (*c*, *f*(*c*))** viene dada por:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

y es llamada **aproximación por medio de una recta tangente** (o **aproximación lineal**) **de *f* en *c***

- Como *c* es una constante, *y* es una función lineal de *x*
- Restringiendo los valores de *x* de modo que sean suficientemente cercanos a *c*, los valores de *y* pueden utilizarse como aproximaciones (hasta cualquier precisión deseada) de los valores de la función *f*
- Es decir, cuando *x* → *c*, el límite de *y* es *f*(*c*)

Ejemplo: Utilización de la aproximación por medio de una recta tangente

Determinar la aproximación por medio de una recta tangente de

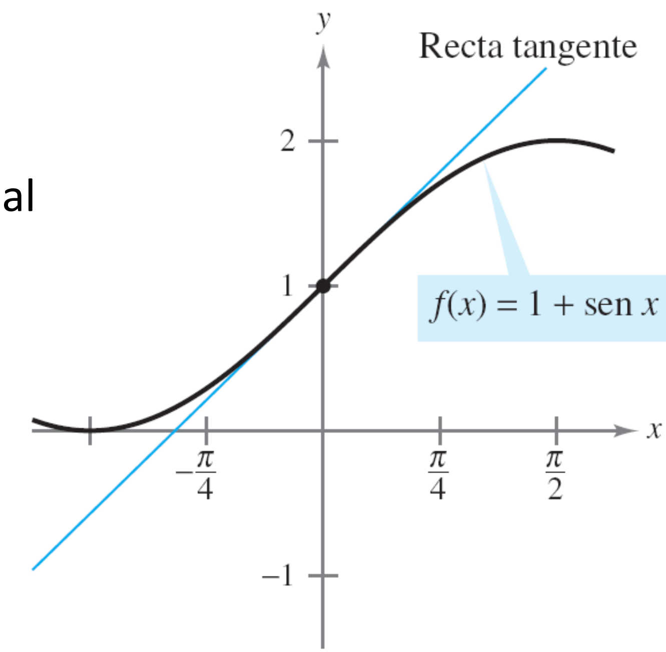
$f(x) = 1 + \text{sen } x$ en el punto (0, 1)

Utilizar una tabla para comparar los valores y de la función lineal con los de $f(x)$ en un intervalo abierto que contenga a $x = 0$

$f'(x) = \cos x$

$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \rightarrow y - 1 = (1)(x - 0) \rightarrow y = 1 + x$

x	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5
$f(x) = 1 + \text{sen } x$	0.521	0.9002	0.9900002	1	1.0099998	1.0998	1.479
$y = 1 + x$	0.5	0.9	0.99	1	1.01	1.1	1.5



La aproximación de la recta tangente de f en el punto (0, 1)

DEFINICIÓN DE DIFERENCIALES

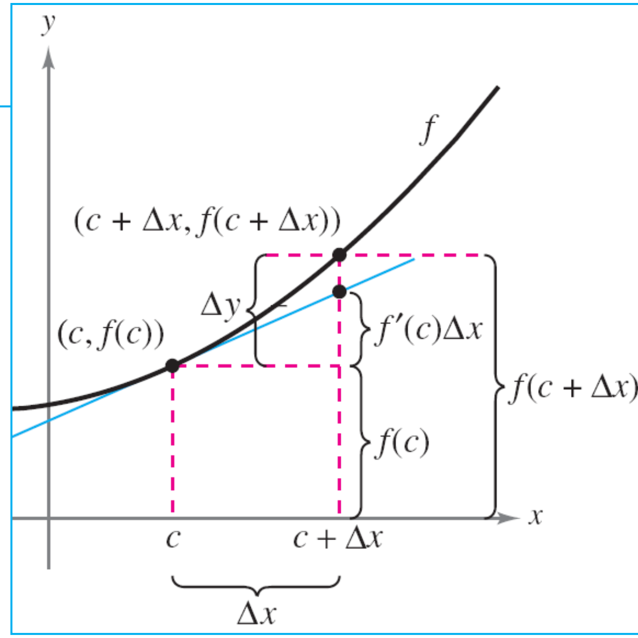
Considerar que $y = f(x)$ representa una función que es derivable en un intervalo abierto que contiene a x. La **diferencial de x** (denotada por dx) es cualquier número real distinto de cero. La **diferencial de y** (denotada por dy) es

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Cuando la tangente a la gráfica de *f* en el punto (*c*, *f*(*c*)) se usa como aproximación de la gráfica de *f*, la cantidad $x - c$ recibe el nombre de cambio en $x \rightarrow \Delta x$

Cuando Δx es pequeña ($\Delta x = dx$) , el cambio en *y* ($\Delta y = dy$) puede aproximarse como:

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \approx f'(c)\Delta x$$



Los **diferenciales se usan** habitualmente para **estimar los errores** de distintos **dispositivos de medida** (ejemplo: dispositivos biomédicos → ECG, EEG, EMG…)

- Si ***x*** denota el **valor medido** de una variable y ***x* + *Δx*** representa el **valor exacto**, entonces ***Δx*** es el ***error de medida***

- Si el **valor medido se usa para calcular otro valor *f*(*x*),** la **diferencia entre *f*(*x* + *Δx*) y *f*(*x*)** es el ***error propagado***

$$\underbrace{f(x + \overbrace{\Delta x}^{\text{Error de medición}})}_{\text{Valor exacto}} - \underbrace{f(x)}_{\text{Valor medido}} = \overbrace{\Delta y}^{\text{Error propagado}}$$

Ejemplo: Sensor de glucosa

Se mide el valor de saturación de la carga Q de un sensor de glucosa tras una medida: Q = 275 µC

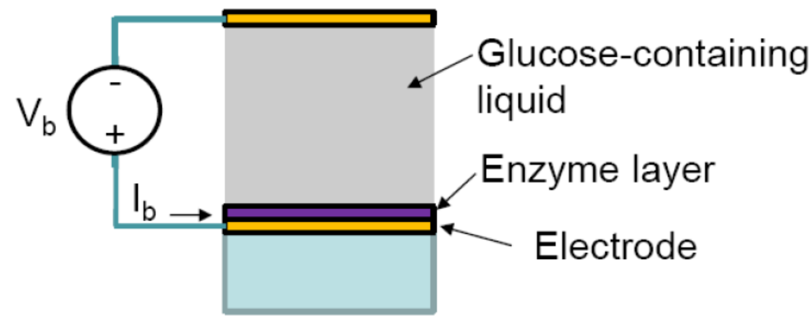
La medición no tiene un error mayor que 0.1 µC

Estimar el error propagado de la concentración de glucosa en sangre (C_0), considerando que $-nFAL$ = 2.5 µC ml / mg

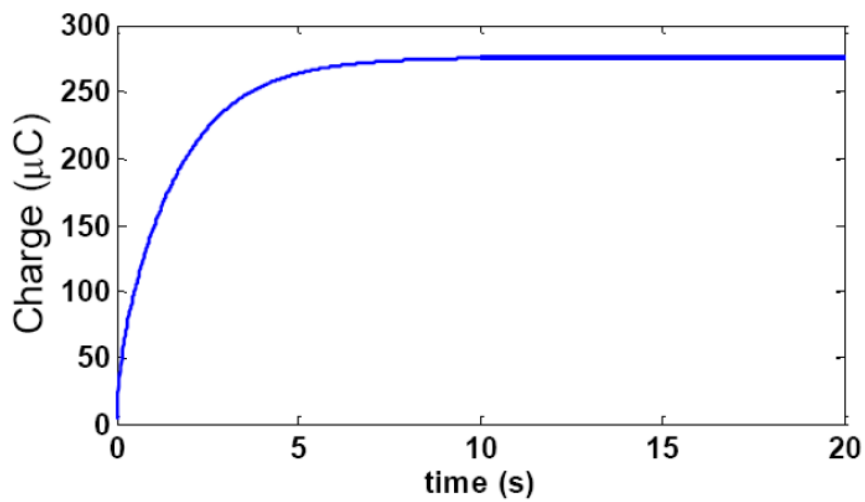
$C_0 = Q / (-nFAL) \rightarrow dC_0 = dQ / -nFAL = \pm 0.04$ mg/ml

$C_0 \pm dC_0$ = 110 ± 0.04 mg/dl

Error relativo = $dC_0 / C_0 \rightarrow$ 0.036 %



$$Q = -nFALC_0$$



Todas las reglas de derivación pueden escribirse en forma diferencial

- Si ***u* y *v*** son **funciones derivables de *x***, puede escribirse:

$$du = u'\,dx \qquad \text{y} \qquad dv = v'\,dx$$

FÓRMULAS DIFERENCIALES

Sean u y v funciones diferenciables de x.

Múltiplo constante:	$d[cu] = c\,du$
Suma o diferencia:	$d[u \pm v] = du \pm dv$
Producto:	$d[uv] = u\,dv + v\,du$
Cociente:	$d\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

Ejemplo: diferencial de una función compuesta

$y = f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$	Función original.
$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$	Aplicación de la regla de la cadena.
$dy = f'(x)\,dx = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$	Forma diferencial.

NOTA: Las diferenciales pueden utilizarse para aproximar valores de funciones:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,dx$$

Esta fórmula se deriva de la aproximación: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$

La clave para utilizarla es elegir un valor de *x* que facilite el cálculo

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Comprender **qué es el cálculo** y **cómo se compara con el precálculo**
- Comprender que el **problema de la recta tangente es básico para el cálculo**
- Comprender que el **problema del área** también es **básico para el cálculo**
- Estimar un **límite utilizando los métodos numérico y gráfico**
- Identificar diferentes **formas en las qué un límite no puede existir**
- Conocer y utilizar la **definición formal de límite**
- **Evaluar un límite** mediante el uso de las **propiedades de los límites**
- **Evaluar un límite** mediante el uso de distintas **técnicas analíticas**
- Determinar la **continuidad en un punto y en un intervalo abierto**
- Determinar **límites laterales y continuidad en un intervalo cerrado**
- Usar las **propiedades de continuidad**
- Comprender y aplicar el **teorema del valor intermedio**
- Determinar **límites infinitos por la izquierda y por la derecha**
- Encontrar y representar las **asíntotas verticales** de la gráfica de una función

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Hallar **la pendiente de la recta tangente a una curva** en un punto
- Usar la definición de **límite para calcular la derivada de una función**
- Comprobar la relación entre **derivabilidad y continuidad**
- Encontrar la **derivada de distintos tipos de funciones** utilizando las **reglas básicas de derivación**
- Usar las **derivadas para calcular razón de cambio**
- Encontrar las **derivadas de orden superior** de una función
- Encontrar la **derivada de una función compuesta por la regla de la cadena**
- Encontrar la **derivada de una función por la regla general de la potencia**
- **Simplificar** la derivada de una función por **técnicas algebraicas**
- Aplicar la **regla de la cadena a funciones trigonométricas**
- Distinguir entre **funciones explícitas e implícitas**
- Hallar la derivada de una función por **derivación implícita**
- Hallar **razones de cambio relacionadas** y resolver problemas utilizándolas

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Identificar y derivar las principales **funciones trascendentes**
- Reconocer los **límites que producen las formas indeterminadas**
- Aplicar la **regla de L'Hôpital para evaluar un límite**
- Entender la definición **de extremos de una función** en un intervalo
- Entender la definición de **extremos relativos** de una función **en un intervalo abierto**
- Encontrar los **extremos en un intervalo cerrado**
- Comprender el uso del **teorema de Rolle**
- Comprender el uso del **teorema del valor medio** (teorema de Lagrange)
- Determinar los **intervalos sobre los cuales una función es creciente o decreciente**
- Aplicar el **criterio de la primera derivada** para determinar los **extremos relativos** de una función
- Determinar **intervalos sobre los cuales una función es cóncava** hacia arriba o hacia abajo
- Encontrar cualesquiera **puntos de inflexión de la gráfica de una función**

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Aplicar el **criterio de la segunda derivada** para determinar **extremos relativos de una función**
- Determinar **límites (finitos) al infinito**
- Determinar las **asíntotas horizontales** (si las hay) de la gráfica de una función
- Determinar **límites infinitos en el infinito**
- Analizar y trazar la **gráfica de una función**
- Resolver **problemas de máximos y mínimos aplicados** (optimización)
- Entender el concepto de una **aproximación por medio de una recta tangente**
- Comparar el **valor de la diferencial** con el **cambio real**
- Estimar un **error propagado** utilizando una diferencial
- Encontrar la **diferencial de una función** utilizando fórmulas de derivación