CEU
Universidad
San Pablo

TEMA 3: INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE, TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

FMIBII – Curso 2016/2017

Biomedical engineering degree

Cristina Sánchez López de Pablo
Universidad San Pablo CEU
Madrid

TEMA 3: INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE, TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Índice de contenidos II

TEMA 3: INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE, TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

TEMA 3: INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE, TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

5. **Integración por sustitución**
   - Reconocimiento de patrones
   - Cambio de variable
   - La regla general de la potencia para integrales
   - Cambio de variable para integrales definidas
   - Integración de funciones pares e impares

6. **Integración de funciones trascendentes**
   - Función logaritmo natural
   - Funciones exponenciales y otras bases distintas de *e*
   - Funciones trigonométricas inversas
   - Funciones hiperbólicas

TEMA 3: INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE, TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

7. **Adaptación de integrandos a las reglas básicas de integración**
8. **Integración por partes**
9. **Integrales trigonométricas**
   - Integrales que contienen potencias de seno y coseno
   - Integrales que contienen potencias de secante y tangente
   - Integrales que contienen los productos seno-coseno de ángulos diferentes
10. **Sustituciones trigonométricas**
    - Sustituciones trigonométricas para evaluar integrales
    - Aplicaciones de las sustituciones trigonométricas

TEMA 3: INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE, TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

11. **Fracciones simples o parciales**
    - Método de las fracciones simples o parciales
    - Factores lineales
    - Factores cuadráticos
12. **Otras técnicas de integración**
    - Integración de funciones racionales de seno y coseno
    - Integración por tablas y fórmulas de reducción
13. **Integrales impropias**
    - Introducción a las integrales impropias
    - Integrales impropias con límites de integración infinitos
    - Integrales impropias con discontinuidades infinitas

Índice de contenidos VI

TEMA 3: INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE, TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

TEMA 3: INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE, TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

17. Trabajo

- Trabajo realizado por una fuerza constante
- Trabajo realizado por una fuerza variable

18. Momentos, centros de masa y centroides

- Masa
- Centros de masa
- Teorema de Pappus

19. Presión y fuerza de un fluido

DEFINICIÓN DE UNA ANTIDERIVADA O PRIMITIVA

Se dice que una función F es una **antiderivada o primitiva** de f, en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

REPRESENTACIÓN DE ANTIDERIVADAS O PRIMITIVAS

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y sólo si G es de la forma $G(x) = F(x) + C$, para todo x en I, donde C es una constante.

Demostración:

⇨ **Si *G* es una antiderivada de *f*** y se define H tal que $H(x) = G(x) - F(x)$, siendo H continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), mediante el teorema del valor medio: $H'(c) = [H(b)-H(a)]/(b-a)$ para algún c en (a, b). Sin embargo, $H'(c) = 0$, por lo que H es constante → $\boldsymbol{G(x) = F(x) + C}$

⇦ **Si $G(x) = F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$ y C es constante**, entonces: $G'(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + 0 = f(x)$

Cuando se escribe una **ecuación diferencial de la forma *dy/dx* = *f*(*x*)** es conveniente **reescribirla** de la forma: ***dy* = *f*(*x*) *dx***

- La **operación** para determinar todas las soluciones de esta ecuación se denomina antiderivación o **integración indefinida**
- La **solución general** se denota mediante →
- La expresión se lee como la antiderivada o **primitiva de *f* con respecto a *x***
- La **diferencial de *dx*** sirve **para identificar a x como la variable de integración**

Variable de integración

Constante de integración

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Integrando

Una antiderivada de $f(x)$

Antiderivadas o primitivas e integración indefinida:
Reglas básicas de integración

Fórmula de derivación	*Fórmula de integración*	
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\,dx = C$	
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\,dx = kx + C$	
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \quad - \quad 1$	Regla de la potencia.
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$	

NOTA: El **patrón general de integración** es **similar** al de la **derivación**

Integral original ⇒ Reescribir ⇒ Integrar ⇒ Simplificar

Ejemplo:

Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
$\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$	$2\int x^{-1/2}\,dx$	$2\left(\frac{x^{1/2}}{1/2}\right) + C$	$4x^{1/2} + C$
$\int (t^2+1)^2\,dt$	$\int (t^4 + 2t^2 + 1)\,dt$	$\frac{t^5}{5} + 2\left(\frac{t^3}{3}\right) + t + C$	$\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C$
$\int \frac{x^3+3}{x^2}\,dx$	$\int (x + 3x^{-2})\,dx$	$\frac{x^2}{2} + 3\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + C$
$\int \sqrt[3]{x}(x-4)\,dx$	$\int (x^{4/3} - 4x^{1/3})\,dx$	$\frac{x^{7/3}}{7/3} - 4\left(\frac{x^{4/3}}{4/3}\right) + C$	$\frac{3}{7}x^{7/3} - 3x^{4/3}$

Ejemplo: Determinación de una solución particular

¿Qué curva *F*(*x*) pasa por el punto (2 , 4)?

$$y = \int (3x^2 - 1)\,dx = x^3 - x + C$$

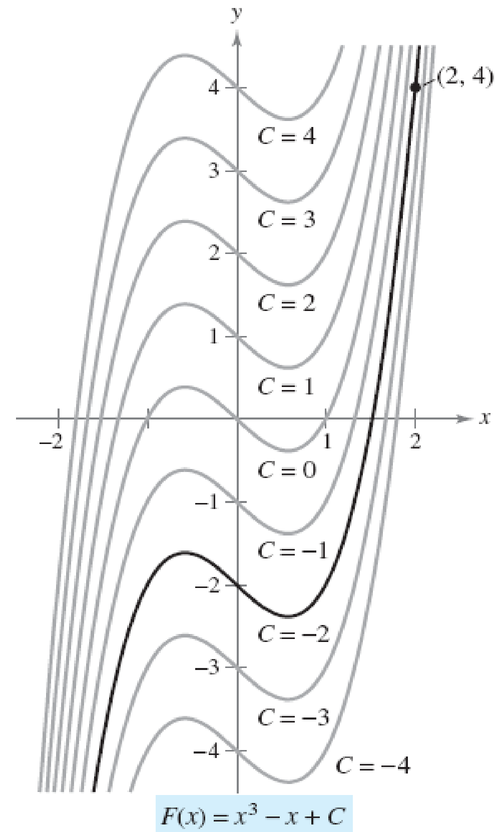
$F(x) = x^3 - x + C$ Solución general.

$F(2) = 4$ Condición inicial.

- **Utilizando la condición inicial en la solución general**, es posible determinar que *F*(2) = 8 – 2 + C = 4, lo que implica que C = -2

- De tal modo se obtiene:

$F(x) = x^3 - x - 2$ Solución particular.



La solución particular que satisface la condición inicial $F(2) = 4$ es $F(x) = x^3 - x - 2$

NOTA: Objetivo → relacionar la antiderivación con el cálculo de áreas

1. Entender la notación sigma, el concepto de área y determinar áreas utilizando límites
2. Encontrar la relación con la antiderivación a través del teorema fundamental del cálculo

Recordar…

NOTACIÓN SIGMA

La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se escribe como

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

donde i es el **índice de suma**, a_i es el ***i*-ésimo término** de la suma y los **límites superior e inferior de la suma** son n y 1.

FÓRMULAS DE SUMA EMPLEANDO LA NOTACIÓN SIGMA

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = cn$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Para aproximar el área de una región bajo una curva…

1. Se subdivide el intervalo [*a*, *b*] en ***n* subintervalos**

$$\underbrace{a + 0(\Delta x)}_{a = x_0} < \underbrace{a + 1(\Delta x)}_{x_1} < \underbrace{a + 2(\Delta x)}_{x_2} < \cdots < \underbrace{a + n(\Delta x)}_{x_n = b}$$

2. Como ***f* es continua**, el teorema del valor extremo garantiza la existencia de un **mínimo y un máximo de *f*(*x*) en cada subintervalo**

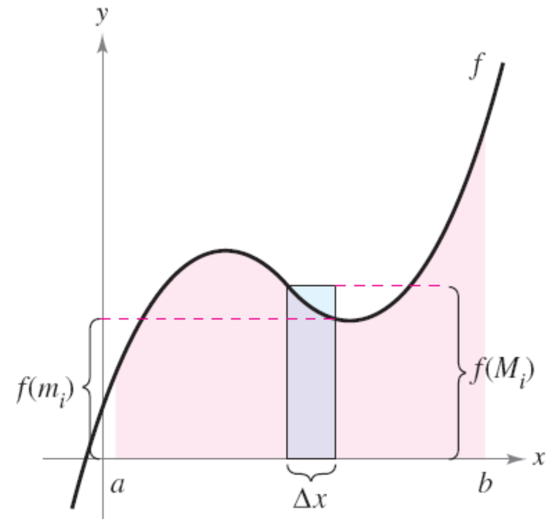
$f(m_i)$ = valor mínimo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo

$f(M_i)$ = valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo

3. Se define **para cada intervalo** un **rectángulo inscrito y otro circunscrito** tales que:

$$\begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{inscrito}\end{pmatrix} = f(m_i)\,\Delta x \le f(M_i)\,\Delta x = \begin{pmatrix}\text{Área del rectángulo}\\ \text{circunscrito}\end{pmatrix}$$

4. Suma de las áreas de los rectángulos inscritos: **suma inferior**
5. Suma de las áreas de los rectángulos circunscritos**: suma superior**



El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos de ancho $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$$\boxed{\begin{aligned} s(n) &= \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \\ S(n) &= \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \end{aligned}}$$

LÍMITES DE LAS SUMAS SUPERIOR E INFERIOR

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Los límites cuando $n \to \infty$ de las sumas inferior y superior existen y son iguales entre sí. Esto es

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} S(n)$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $f(m_i)$ y $f(M_i)$ son los valores mínimo y máximo de f en el subintervalo.

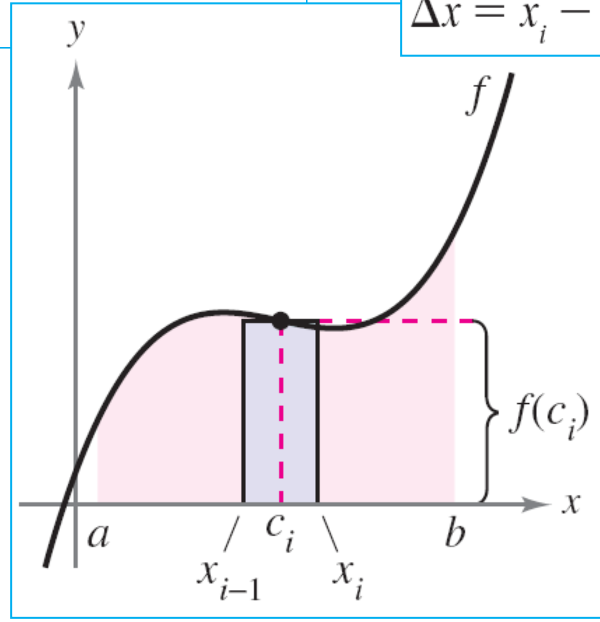
DEFINICIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$

El ancho del i-ésimo subintervalo es $\Delta x = x_i - x_{i-1}$



Ejemplo: Hallar el área mediante la definición de límite

Encontrar el área de la región limitada por:

- La gráfica $f(x) = x^3$
- El eje x
- Las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$

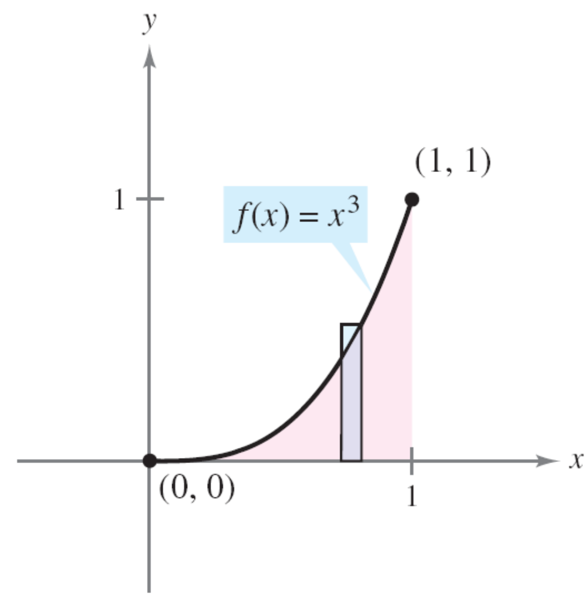
***f* es continua y no negativa en [0, 1]**

Dividimos el intervalo [0, 1] en ***n* subintervalos**: $\Delta x = 1/n$

Elegir cualquier **valor de *x* en el *i-ésimo* intervalo,** por ejemplo, los **puntos terminales derechos $c_i = i/n$**

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{1}{4}$$



El área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = 0$ y $x = 1$ es $\frac{1}{4}$

CEU Universidad San Pablo

DEFINICIÓN DE UNA SUMA DE RIEMANN

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_{n-1} < x_n = b$$

donde Δx_i es el ancho del i-ésimo subintervalo. Si c_i es *cualquier* punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

se denomina una **suma de Riemann** de f para la partición Δ.

El **ancho del subintervalo más grande** de la partición Δ es la **norma** → **|| Δ ||**

Si todos los **subintervalos** tienen la **misma anchura**, la **partición es regular** → $\|\Delta\| = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

En una **partición general**, la **norma se relaciona con el número de subintervalos** → $\dfrac{b-a}{\|\Delta\|} \leq n$

$\|\Delta\| \to 0$ implica que $n \to \infty$ (el recíproco no es cierto a no ser que la partición sea regular)

DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL DEFINIDA

Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite de las sumas de Riemann sobre las particiones Δ

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

existe $\Rightarrow$ hay un número real L, tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$

tal que para toda partición de $\|\Delta\| < \delta$ se sigue que $\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \right| < \varepsilon$

entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota por

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

El límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b. El número a es el **límite inferior** de integración, y el número b es el **límite superior** de integración.

LA CONTINUIDAD IMPLICA INTEGRABILIDAD

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. Es decir, $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Ejemplo: Evaluación de una integral definida como límite: $\int_{-2}^{1} 2x\,dx$

La función $f(x) = 2x$ **es integrable** en [-2, 1] **porque es continua** en [-2 , 1]

Definimos Δ subdividiendo [-2, 1] en *n* intervalos de la misma anchura, eligiendo c_i como el punto terminal derecho de cada subintervalo:

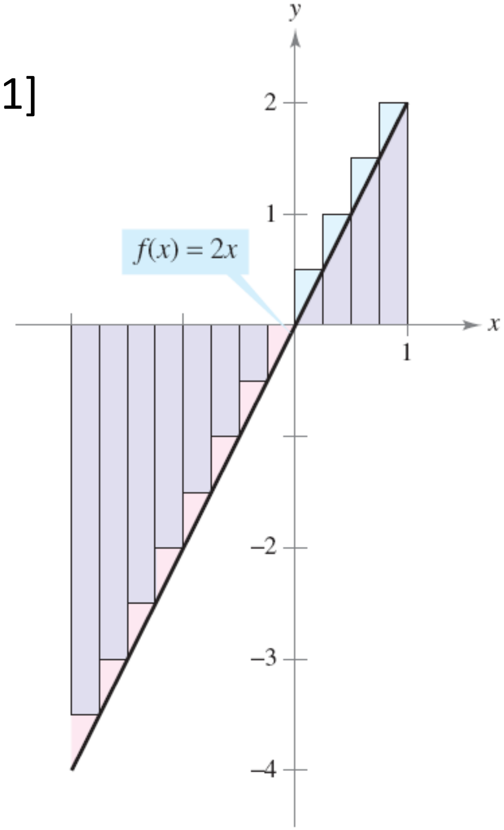
$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n} \qquad c_i = a + i(\Delta x) = -2 + \frac{3i}{n}$$

De este modo, la integral definida está dada por:

$$\int_{-2}^{1} 2x\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(-2 + \frac{3i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{6}{n}\left\{-2n + \frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\} = \lim_{n \to \infty} \left(-12 + 9 + \frac{9}{n}\right) = -3$$

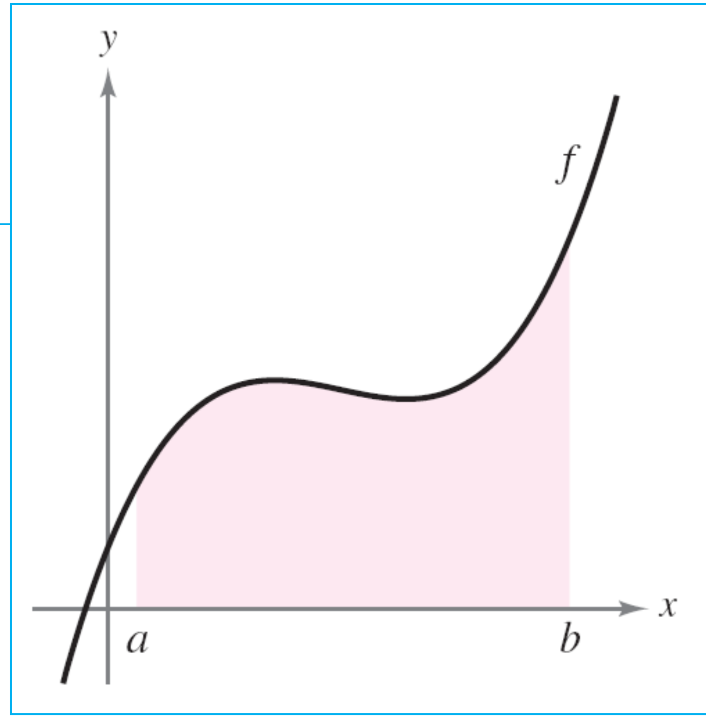


Como la integral definida es negativa, no representa el área de la región

LA INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA DE UNA REGIÓN

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, del eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$



Se puede usar una integral definida para determinar el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = a$ y $x = b$

DEFINICIONES DE DOS INTEGRALES DEFINIDAS ESPECIALES

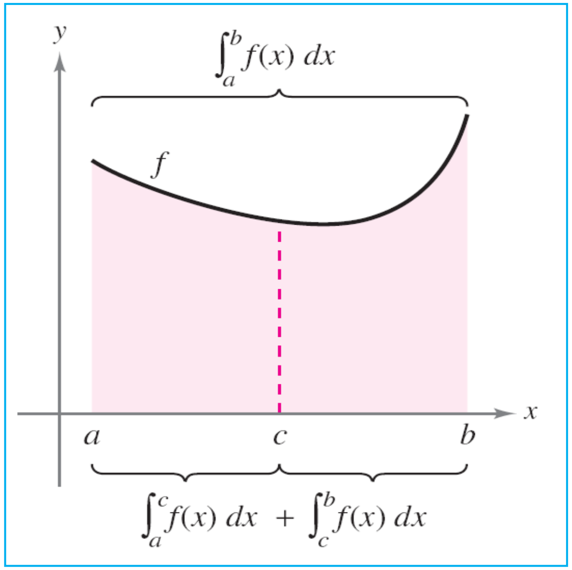
1. Si f está definida en $x = a$, entonces se define $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces se define $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

PROPIEDAD ADITIVA DE INTERVALOS

Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables en $[a, b]$, y

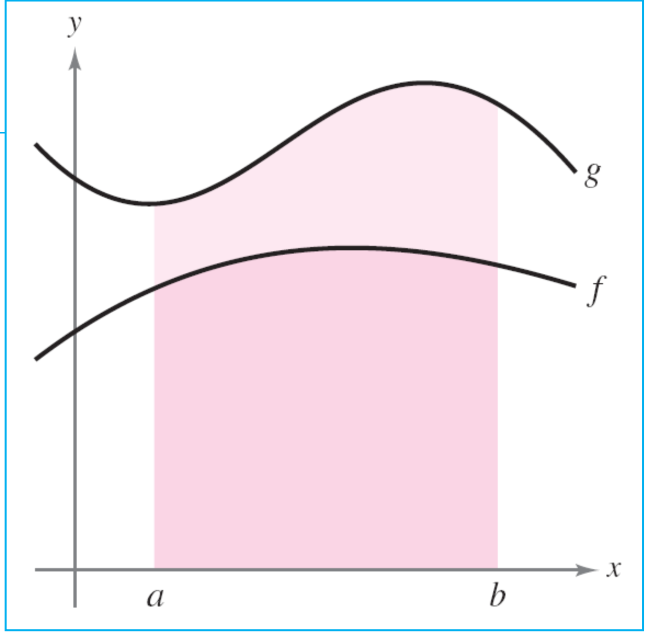
1. $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

2. $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

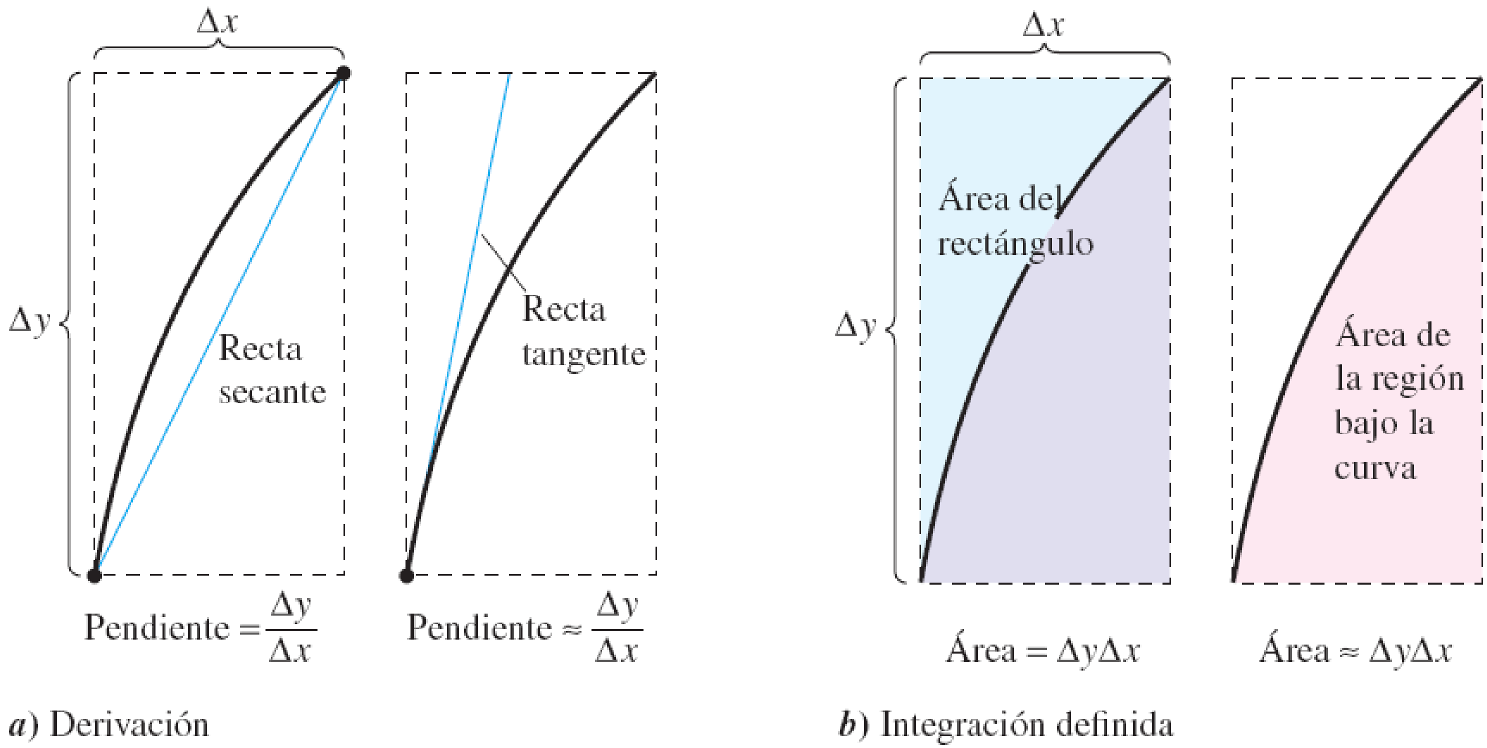
CONSERVACIÓN DE DESIGUALDADES

1. Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $0 \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

2. Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para x en $[a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$



La **derivación y la integración definida** tienen una **relación "inversa"**



NOTA: El **teorema fundamental del cálculo** establece que **los procesos de límite** (utilizados para definir la derivada y la integral definida) **preservan esta relación inversa**

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración:

Sea Δ la siguiente partición de [a, b]: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

Resta y suma de términos análogos: $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$

De acuerdo con el teorema del valor medio: $F'(c_i) = \dfrac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \Rightarrow F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$

F(*b*) – *F*(*a*) = Suma de Riemann de *f* en [a, b]:

por lo que, en el límite cuando ||Δ|| → 0: $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo

1. *Suponiendo que se conozca* una antiderivada o primitiva f, se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3\,dx$, es posible escribir

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva ya que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) + C\Big]_a^b$$
$$= [F(b) + C] - [F(a) + C]$$
$$= F(b) - F(a).$$

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo: Empleo del teorema fundamental del cálculo par encontrar un área

Encontrar el área de la región delimitada por:

- La gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$
- El eje y
- Las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$

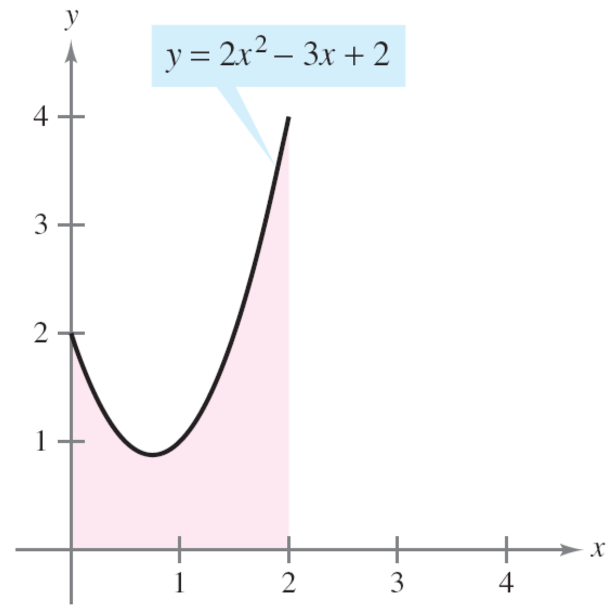
Notar que $y > 0$ en el intervalo [0, 2]

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\,dx \qquad \text{Integrar entre } x = 0 \text{ y } x = 2.$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 \qquad \text{Encontrar la antiderivada.}$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4\right) - (0 - 0 + 0) \qquad \text{Aplicar el teorema fundamental del cálculo.}$$

$$= \frac{10}{3} \qquad \text{Simplificar.}$$

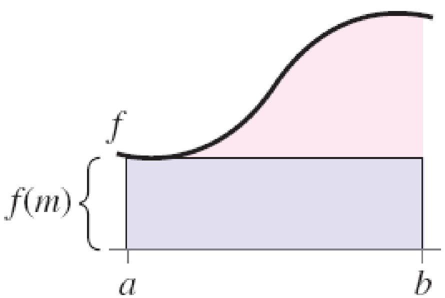


El área de la región acotada por la gráfica de y, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$ es $\frac{10}{3}$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

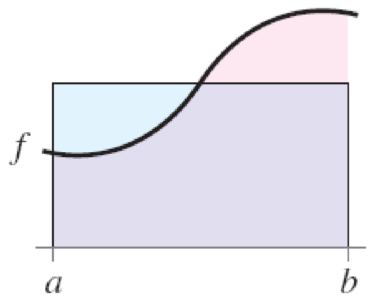
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$



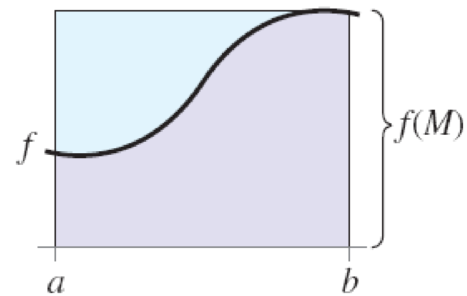
Rectángulo inscrito (menor que el área real)

$$\int_a^b f(m)\,dx = f(m)(b - a)$$



Rectángulo del valor medio (igual al área real)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



Rectángulo circunscrito (mayor que el área real)

$$\int_a^b f(M)\,dx = f(M)(b - a)$$

DEFINICIÓN DEL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

Si f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **valor medio** de f en el intervalo es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

¿Por qué se define así el promedio de *f*?

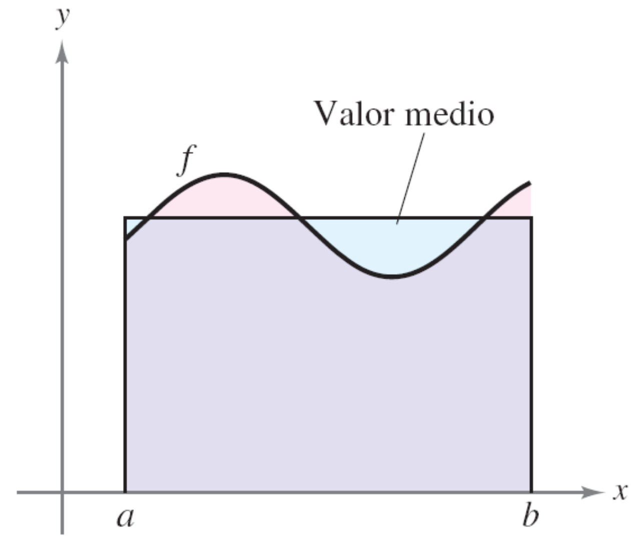
Se divide [a, b] en *n* intervalos de igual anchura Δ*x* = (*b* – *a*) / *n*

Si c_i es cualquier punto en el *i-ésimo* intervalo, la media aritmética de los valores de la función en los c_i está dada por:

$$a_n = \frac{1}{n}[f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)]$$

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{b-a}\right) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

En el límite ($n \to \infty$), se obtiene el valor medio de *f* en [*a*, *b*]



$$\text{Valor medio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

EL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en un intervalo abierto I que contiene a, entonces, para todo x en el intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

Demostración:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right]$$

Por el teorema del valor medio para integrales (suponiendo $\Delta x > 0$), se sabe que existe un número c en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ tal que la integral anterior es igual a $f(c)\,\Delta x$. Además, como $x \leq c \leq x + \Delta x$ se sigue que $c \to x$ cuando $\Delta x \to 0$. De tal modo:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x} f(c)\,\Delta x\right] = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

Ejemplo: Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo

Encontrar la derivada de:

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t \, dt$$

Haciendo $u = x^3$, **se aplica el segundo teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena**:

$$F'(x) = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}[F(x)]\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t \, dt\right]\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{u} \cos t \, dt\right]\frac{du}{dx} = (\cos u)(3x^2) = (\cos x^3)(3x^2)$$

Comprobación:

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t \, dt = \operatorname{sen} t \Big]_{\pi/2}^{x^3} = \operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = (\operatorname{sen} x^3) - 1$$

$$F'(x) = (\cos x^3)(3x^2)$$

La **sustitución en la integración** es **comparable** a la **regla de la cadena en la derivación**

RECORDAR…

- Para funciones derivables dadas por *y* = *F*(*u*) y *u* = *g*(*x*): $\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$
- De acuerdo con la definición de una antiderivada o primitiva: $\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$

ANTIDERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Sea g una función cuyo recorrido o rango es un intervalo I, y sea f una función continua en I. Si g es derivable en su dominio y F es una antiderivada o primitiva de f en I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$ y

$$\int f(u)\,du = F(u) + C.$$

Ejemplo: Reconocimiento del patrón $f(g(x))g'(x)$

$$\int x(x^2 + 1)^2\, dx$$

$g(x) = x^2 + 1$

$g'(x) = 2x$ → al integrando le falta un factor 2 → multiplicamos y dividimos entre 2

$$\int x(x^2+1)^2\,dx = \int (x^2+1)^2\left(\frac{1}{2}\right)(2x)\,dx \qquad \text{Multiplicar y dividir entre 2.}$$

$$= \frac{1}{2}\int \overbrace{(x^2+1)^2}^{f(g(x))}\,\overbrace{(2x)}^{g'(x)}\,dx \qquad \text{Regla del múltiplo constante.}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^3}{3}\right] + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+1)^3 + C \qquad \text{Simplificar.}$$

NOTA: la regla del múltiplo constante se aplica solamente a *constantes*. No se pude multiplicar y dividir por una variable y después mover la variable fuera del signo integral

Técnica del cambio de variable:

Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$ → $$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C$$

Estrategia para realizar un cambio de variable

1. Elegir una sustitución $u = g(x)$. Usualmente, es mejor elegir la parte *interna* de una función compuesta, tal como una cantidad elevada a una potencia.
2. Calcular $du = g'(x)dx$.
3. Reescribir la integral en términos de la variable u.
4. Encontrar la integral resultante en términos de u.
5. Reemplazar u por $g(x)$ para obtener una antiderivada o primitiva en términos de x.
6. Verificar la respuesta por derivación.

NOTA: Aunque este procedimiento puede implicar más pasos que el reconocimiento de patrones, es útil para integrandos complicados

Ejemplo: Cambio de variable

$$\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x \, dx$$

- Debido a que $\operatorname{sen}^2 3x = (\operatorname{sen} 3x)^2$, podemos tomar $u = \operatorname{sen} 3x \rightarrow du = (\cos 3x)(3)\, dx$
- Como $\cos 3x\, dx$ es parte de la integral original, puede escribirse: $du/3 = \cos 3x\, dx$
- Sustituyendo u y $du/3$ en la integral original, se obtiene:

$$\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 3x \, dx = \int u^2 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^2\, du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3}\right) + C = \frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x + C$$

LA REGLA GENERAL DE LA POTENCIA PARA INTEGRALES

Si g es una función derivable de x, entonces

$$\int [g(x)]^n g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

De manera equivalente, si $u = g(x)$, entonces

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

Ejemplo:

$$\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}\, dx = \int \overbrace{(1-2x^2)^{-2}}^{u^{-2}} \overbrace{(-4x)\, dx}^{du} = \overbrace{\frac{(1-2x^2)^{-1}}{-1}}^{u^{-1}/(-1)} + C = -\frac{1}{1-2x^2} + C$$

CAMBIO DE VARIABLE PARA INTEGRALES DEFINIDAS

Si la función $u = g(x)$ tiene una derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y f es continua en el recorrido o rango de g, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

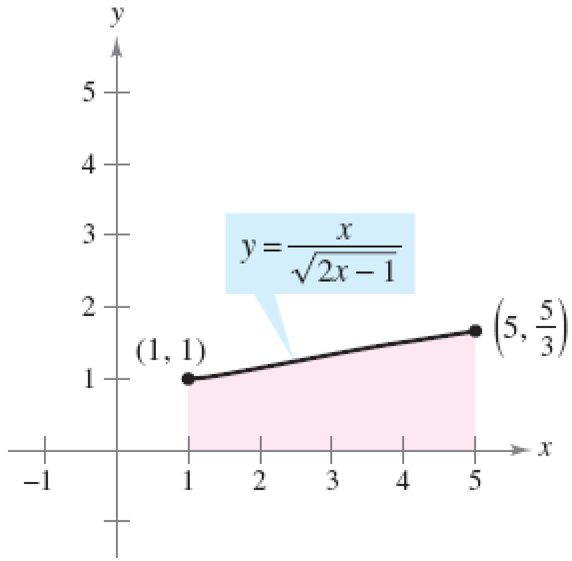
Ejemplo:

$$A = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$$

$$u = \sqrt{2x-1} \Rightarrow u^2 = 2x - 1 \Rightarrow \frac{u^2+1}{2} = x \Rightarrow u\,du = dx$$

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = 1,\ u = \sqrt{2-1} = 1$	Cuando $x = 5,\ u = \sqrt{10-1} = 3$

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2+1}{2}\right)u\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} + u\right]_1^3 = \frac{16}{3}$$



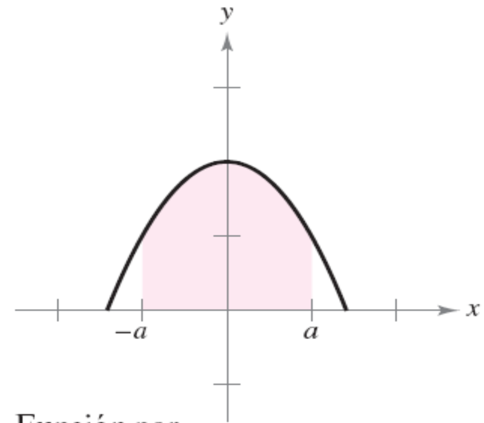
En ocasiones **se puede simplificar el cálculo de una integral definida** (en un intervalo que es simétrico respecto al eje *y* o respecto al origen) **reconociendo que el integrando es una función par o impar**

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES PARES E IMPARES

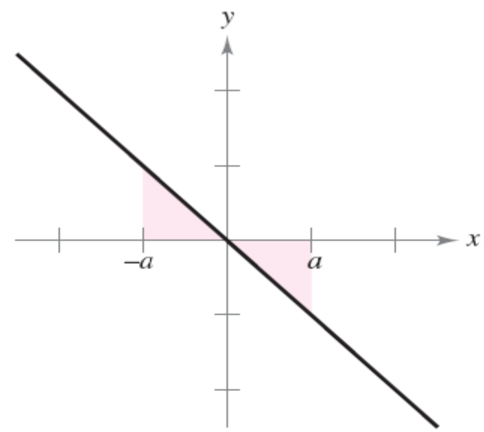
Sea f integrable en el intervalo cerrado $[-a, a]$.

1. Si f es una función *par*, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

2. Si f es una función *impar*, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$



Función par



Función impar

RECORDAR…

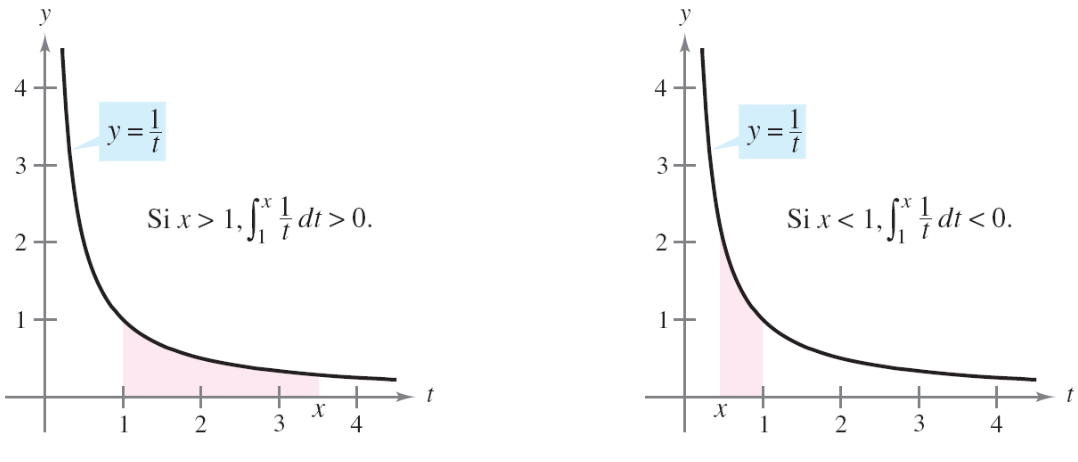
- Función par → $f(x) = f(-x)$
- Función impar → $f(x) = -f(-x)$

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

La **función logaritmo natural** se define como

$$\ln\ x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0.$$

El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de todos los números reales positivos.



Si $x > 1$, entonces $\ln x > 0$ Si $0 < x < 1$, entonces $\ln x < 0$

RECORDAR…

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[\ln|u|] = \frac{u'}{u}$$

REGLA DE LOGARITMO PARA INTEGRACIÓN

Sea u una función derivable de x.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ **2.** $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Como *du* = *u’ dx*, la segunda fórmula también puede expresarse como:

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$$

Ejemplo: cambio de variable con la regla del logaritmo

$$\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx$$

Si se toma $u = x + 1$, entonces $du = dx$ y $x = u - 1$

$\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{2(u-1)}{u^2}\,du$	Sustituir.
$\displaystyle = 2\int \left(\frac{u}{u^2} - \frac{1}{u^2}\right) du$	Reescribir como dos fracciones.
$\displaystyle = 2\int \frac{du}{u} - 2\int u^{-2}\,du$	Reescribir como dos integrales.
$\displaystyle = 2\ln\lvert u\rvert - 2\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + C$	Integrar.
$\displaystyle = 2\ln\lvert u\rvert + \frac{2}{u} + C$	Simplificar.
$\displaystyle = 2\ln\lvert x+1\rvert + \frac{2}{x+1} + C$	Sustitución regresiva.

CEU Universidad San Pablo

Con la **regla del logaritmo**, se puede **completar el conjunto de reglas básicas de integración trigonométrica:**

Integrales de las seis funciones trigonométricas básicas

$$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C \qquad \int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$$

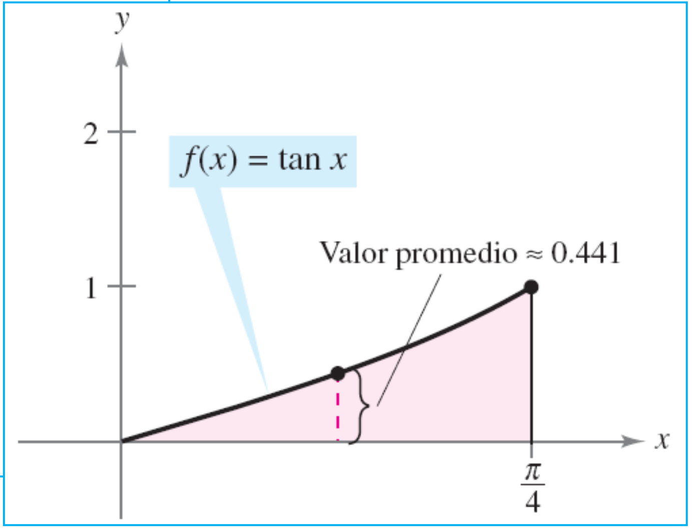
$$\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C \qquad \int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C \qquad \int \csc u\, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

Ejemplo: Encontrar un valor promedio utilizando la regla del logaritmo en funciones trigonométricas

Encontrar el valor promedio de *f*(*x*) = tan *x* en el intervalo [0, π/4]

$$\begin{aligned}
\text{Valor promedio} &= \frac{1}{(\pi/4) - 0}\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx && \text{Valor promedio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx. \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx && \text{Simplificar.} \\
&= \frac{4}{\pi}\Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{\pi/4} && \text{Integrar.} \\
&= -\frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1)\right] \\
&= -\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0.441
\end{aligned}$$



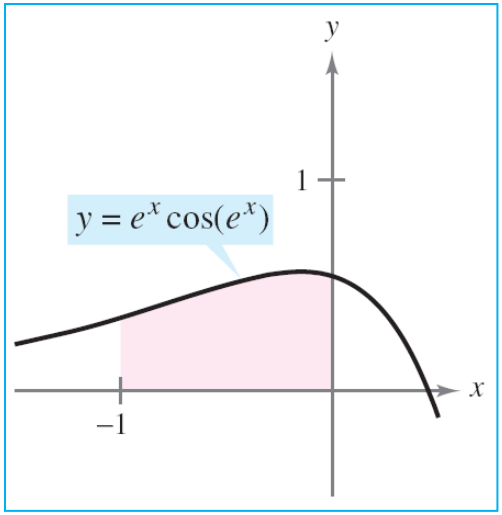
REGLAS DE INTEGRACIÓN PARA FUNCIONES EXPONENCIALES

Si u es una función derivable de x.

1. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$ **2.** $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

Ejemplo: Cálculo de áreas acotadas o delimitadas por funciones exponenciales

$$\int_{-1}^{0} [e^x \cos(e^x)]\,dx = \operatorname{sen}(e^x)\Big]_{-1}^{0}$$
$$= \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen}(e^{-1})$$
$$\approx 0.482$$



Si el integrando contiene una función exponencial en una base distinta de e, hay dos opciones:

1. **Pasar a base *e*** usando la fórmula $a^x = e^{(\ln a)x}$

2. **Integrar directamente:**

$$\int a^x \, dx = \left(\frac{1}{\ln a}\right) a^x + C$$

Ejemplo: Integración de una función exponencial en una base distinta

$$\int 2^x \, dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + C$$

CEU Universidad San Pablo

RECORDAR…

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsen} x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

INTEGRALES QUE INVOLUCRAN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Sea u una función derivable de x, y sea $a > 0$.

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{|u|}{a} + C$

Ejemplo: **completar el cuadrado y usar funciones trigonométricas inversas**

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+7} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$$

$$\boxed{u = x-2 \text{ y } a = \sqrt{3}}$$

CEU Universidad San Pablo

RESUMEN de las reglas básicas de integración (a > 0)

1. $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$
3. $\int du = u + C$
4. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int e^u\,du = e^u + C$
7. $\int a^u\,du = \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)a^u + C$
8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
11. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
12. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
13. $\int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$
14. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
15. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
16. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
17. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \dfrac{u}{a} + C$
19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{u}{a} + C$
20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arcsec} \dfrac{|u|}{a} + C$

INTEGRALES DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Sea u una función derivable de x.

$$\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C \qquad \int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C \qquad \int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C \qquad \int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$$

Ejemplo:

$$\int \cosh 2x \operatorname{senh}^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{senh} 2x)^2 (2 \cosh 2x)\, dx \qquad u = \operatorname{senh} 2x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(\operatorname{senh} 2x)^3}{3}\right] + C = \frac{\operatorname{senh}^3 2x}{6} + C$$

CEU Universidad San Pablo

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Sea u una función derivable de x.

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$$

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9x^2}} = \int \frac{3\,dx}{(3x)\sqrt{4 - 9x^2}}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}}$$

$$\boxed{a = 2 \text{ y } u = 3x}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{4 - 9x^2}}{|3x|} + C$$

$$-\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{|u|} + C$$

CEU Universidad San Pablo

Adaptación de integrandos a las reglas básicas de integración

Para **resolver** cualquier **problema de integración** es necesario **plantearse**…

¿qué regla básica de integración usar? → ADAPTAR LOS INTEGRANDOS

Procedimientos para adaptar los integrandos a las reglas básicas

Técnica	*Ejemplo*
Desarrollar (el numerador).	$(1+e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$
Separar el numerador.	$\dfrac{1+x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{x}{x^2+1}$
Completar el cuadrado.	$\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$
Dividir la función racional impropia.	$\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$
Sumar y restar términos en el numerador.	$\dfrac{2x}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2-2}{x^2+2x+1} = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$
Usar identidades trigonométricas.	$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$
Multiplicar y dividir por el conjugado pitagórico.	$\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right)\left(\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right) = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$ $= \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

CEU Universidad San Pablo

Adaptación de integrandos a las reglas básicas de integración II

Ejemplo: Una sustitución del tipo $a^2 - u^2$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^6}}\,dx$$

El radical en el denominador puede escribirse de la forma $\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{4^2 - (x^3)^2}$

Se puede probar la sustitución $u = x^3 \rightarrow du = 3x^2\,dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^6}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{16 - (x^3)^2}} \qquad \text{Reescribir la integral.}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4^2 - u^2}} \qquad \text{Sustitución: } u = x^3.$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{u}{4} + C \qquad \text{Regla del arcoseno.}$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{x^3}{4} + C. \qquad \text{Reescribir como una función de } x.$$

Adaptación de integrandos a las reglas básicas de integración III

Ejemplo: Una forma disfrazada de la regla de la potencia

$$\int (\cot x)[\ln(\operatorname{sen} x)]\, dx$$

Considerando dos opciones para u: u = cot x y u = ln (sen x), se puede ver que la opción apropiada es la segunda ya que:

$$u = \ln(\operatorname{sen} x) \qquad \text{y} \qquad du = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \cot x\, dx.$$

$$\int (\cot x)[\ln(\operatorname{sen} x)]\, dx = \int u\, du \qquad \text{Sustitución: } u = \ln(\operatorname{sen} x).$$

$$= \frac{u^2}{2} + C \qquad \text{Integrar.}$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(\operatorname{sen} x)]^2 + C. \qquad \text{Reescribir como una función de } x.$$

La técnica de la **integración por partes** es particularmente **útil en integrandos que contengan productos de funciones algebraicas y trascendentes**

INTEGRACIÓN POR PARTES

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = uv' + vu'$$

$$uv = \int uv'\,dx + \int vu'\,dx = \int u\,dv + \int v\,du$$

Estrategia para integrar por partes

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

Observe que dv siempre incluye dx del integrando original.

Resumen de integrales comunes utilizando integración por partes

1. Para integrales de la forma

$$\int x^n e^{ax}\,dx, \qquad \int x^n \operatorname{sen} ax\,dx, \qquad \text{o} \qquad \int x^n \cos ax\,dx$$

sea $u = x^n$ y sea $dv = e^{ax}\,dx$, $\operatorname{sen} ax\,dx$, o $\cos ax\,dx$.

2. Para integrales de la forma

$$\int x^n \ln x\,dx, \qquad \int x^n \operatorname{arcsen} ax\,dx, \qquad \text{o} \qquad \int x^n \arctan ax\,dx$$

sea $u = \ln x$, $\operatorname{arcsen} ax$, o $\arctan ax$ y sea $dv = x^n\,dx$.

3. Para integrales de la forma

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx \qquad \text{o} \qquad \int e^{ax} \cos bx\,dx$$

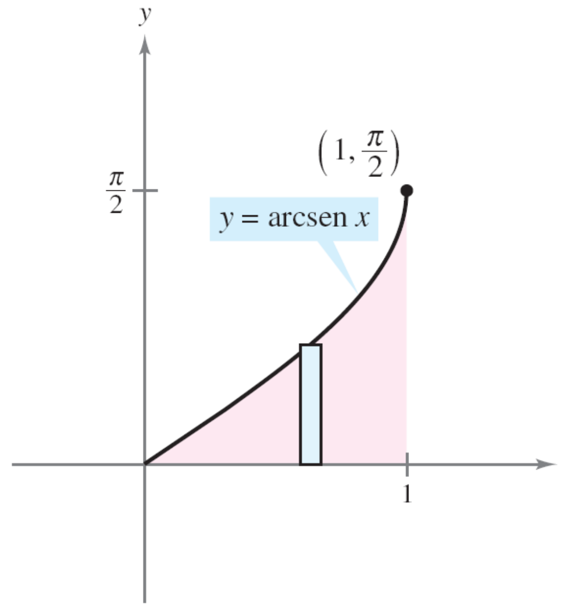
sea $u = \operatorname{sen} bx$ o $\cos bx$ y sea $dv = e^{ax}\,dx$.

Ejemplo: Un integrando con un solo factor

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

$$u = \operatorname{arcsen} x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$



El área de la región es aproximadamente 0.571

Utilizando la integración por partes tenemos que:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arcsen} x \, dx &= x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ &= x \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}(-2x)\, dx \\ &= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \Big[x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.571$$

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo: Integraciones sucesivas por partes

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$$

Los factores x^2 y sen x son igualmente fáciles de integrar. Sin embargo, la derivada de x^2 es más sencilla, por lo que elegimos la opción $u = x^2$

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$$
$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx$$

$$\Rightarrow \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$

La integral de la derecha aún no se adapta a una regla básica de integración. Para evaluar esta integral, aplicamos de nuevo la integración por partes, con $u = 2x$

$$dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$$
$$u = 2x \Rightarrow du = 2 \, dx$$

$$\Rightarrow \int 2x \cos x \, dx = 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x \, dx$$
$$= 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$$

CEU Universidad San Pablo

Para evaluar integrales de este tipo, (m, n ≥ 0) es necesario intentar **separarlas en combinaciones de integrales trigonométricas a las que pueda aplicarse la regla de la potencia**

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx \quad \text{y} \quad \int \sec^m x \tan^n x \, dx$$

Estrategia para evaluar integrales que contienen senos y cosenos

1. Si la potencia del seno es impar y positiva, conservar un factor seno y pasar los factores restantes a cosenos. Entonces, desarrollar e integrar.

$$\int \overbrace{\operatorname{sen}^{2k+1}}^{\text{Impar}} x \cos^n x \, dx = \int \overbrace{(\operatorname{sen}^2 x)^k}^{\text{Convertir a senos}} \cos^n x \overbrace{\operatorname{sen} x \, dx}^{\text{Conservar para } du} = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx$$

2. Si la potencia del coseno es impar y positiva, conservar un factor coseno y pasar los factores restantes a senos. Entonces, desarrollar e integrar.

$$\int \operatorname{sen}^m x \overbrace{\cos^{2k+1}}^{\text{Impar}} x \, dx = \int \operatorname{sen}^m x \overbrace{(\cos^2 x)^k}^{\text{Convertir a senos}} \overbrace{\cos x \, dx}^{\text{Conservar para } du} = \int \operatorname{sen}^m x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx$$

3. Si las potencias de ambos son pares y no negativas, usar repetidamente las identidades.

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

para convertir el integrando a potencias impares del coseno. Entonces procédase como en la estrategia 2.

Ejemplo: La potencia del seno es impar y positiva (caso 1)

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx$$

Ya que se espera **usar la regla de la potencia con *u* = cos *x***, se ***conserva un factor* para formar *du*** y **se convierten los factores del seno restantes a cosenos**

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x (\operatorname{sen} x) \, dx && \text{Reescribir.} \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx && \text{Identidad trigonométrica.} \\
&= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \operatorname{sen} x \, dx && \text{Multiplicar.} \\
&= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x \, dx && \text{Reescribir.} \\
&= -\int \cos^4 x (-\operatorname{sen} x) \, dx + \int \cos^6 x (-\operatorname{sen} x) \, dx \\
&= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C && \text{Integrar.}
\end{aligned}
$$

$$\int \sec^m x \tan^n x\, dx$$

Estrategia para evaluar integrales que contienen secante y tangente

1. Si la potencia de la secante es par y positiva, conservar un factor secante cuadrado y convertir los factores restantes a tangentes. Entonces desarrollar e integrar.

$$\int \sec^{\overbrace{2k}^{\text{Par}}} x \tan^n x\, dx = \int \overbrace{(\sec^2 x)^{k-1}}^{\text{Convertir a tangentes}} \tan^n x \overbrace{\sec^2 x\, dx}^{\text{Conservar para } du} = \int (1 + \tan^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x\, dx$$

2. Si la potencia de la tangente es impar y positiva, conservar un factor secante tangente y convertir los factores restantes a secantes. Entonces desarrollar e integrar.

$$\int \sec^m x \tan^{\overbrace{2k+1}^{\text{Impar}}} x\, dx = \int \sec^{m-1} \overbrace{x(\tan^2 x)^k}^{\text{Convertir a secantes}} \overbrace{\sec x \tan x\, dx}^{\text{Conservar para } du} = \int \sec^{m-1} x(\sec^2 x - 1)^k \sec x \tan x\, dx$$

3. Si no hay factores secantes y la potencia de la tangente es par y positiva, convertir un factor tangente cuadrado a secante cuadrado. Entonces desarrollar y repetir si es necesario.

$$\int \tan^n x\, dx = \int \tan^{n-2} \overbrace{x(\tan^2 x)}^{\text{Convertir a secantes}} dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\, dx$$

4. Si la integral es de la forma $\int \sec^m x\, dx$ donde m es impar y positiva, usar la integración por partes.

5. Si ninguna de las primeras cuatro guías aplica, intentar convertir el integrando en senos y cosenos.

Ejemplo: La potencia de la tangente es impar y positiva (caso 2)

$$\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}}\,dx$$

Debido a que se espera usar la regla de la potencia con *u* = sec *x*, se *conserva un factor* de (sec *x* tan *x*) para formar *du* y se convierten los factores tangentes restantes a secantes

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}}\,dx &= \int (\sec x)^{-1/2}\tan^3 x\,dx \\
&= \int (\sec x)^{-3/2}(\tan^2 x)(\sec x \tan x)\,dx \\
&= \int (\sec x)^{-3/2}(\sec^2 x - 1)(\sec x \tan x)\,dx \\
&= \int [(\sec x)^{1/2} - (\sec x)^{-3/2}](\sec x \tan x)\,dx \\
&= \frac{2}{3}(\sec x)^{3/2} + 2(\sec x)^{-1/2} + C
\end{aligned}$$

En estos casos, es útil utilizar las identidades de producto – suma

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x])$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}[(m-n)x] + \operatorname{sen}[(m+n)x])$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x])$$

Ejemplo: Uso de la segunda identidad del producto-suma

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 5x \cos 4x \, dx &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{\cos 9x}{9}\right) + C \\ &= -\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + C\end{aligned}$$

Sabiendo evaluar integrales que contienen potencias de funciones trigonométricas…

↓

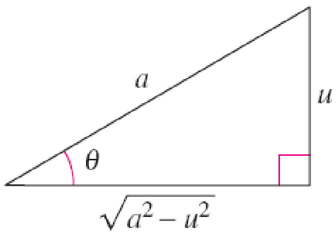
es útil utilizar ***sustituciones trigonométricas*** para **evaluar integrales que contienen cierto tipo de radicales**

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS ($a > 0$)

1. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$, sea

$$u = a \operatorname{sen} \theta.$$

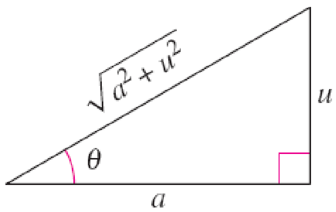
Entonces $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.



2. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$, sea

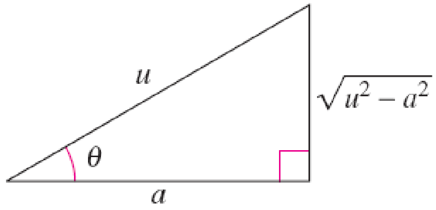
$$u = a \tan \theta.$$

Entonces $\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.



3. Para integrales que contienen $\sqrt{u^2 - a^2}$, sea

$$u = a \sec \theta.$$



Entonces

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \begin{cases} a \tan \theta, \text{ si } u > a, \text{ donde } 0 \le \theta < \pi/2 \\ -a \tan \theta \text{ si } u < -a, \text{ donde } \pi/2 < \theta \le \pi. \end{cases}$$

Sustituciones trigonométricas:

Sustituciones trigonométricas para evaluar integrales II

Ejemplo: sustituciones trigonométricas (caso 3) y transformación de los límites de integración

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x}\, dx$$

Límite inferior	*Límite superior*
Cuando $x = \sqrt{3}$, $\sec\theta = 1$ y $\theta = 0$	Cuando $x = 2$, $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$

En este caso:

$$u = x, \quad a = \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad x = \sqrt{3}\sec\theta$$

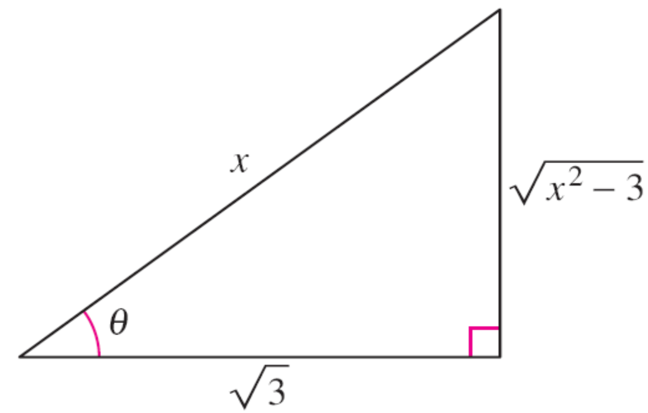
$$dx = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\, d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{3}\tan\theta$$

Solución:

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x}\, dx = \int_{0}^{\pi/6} \frac{\left(\sqrt{3}\tan\theta\right)\left(\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\right) d\theta}{\sqrt{3}\sec\theta}$$

$$= \int_{0}^{\pi/6} \sqrt{3}\tan^2\theta\, d\theta = \sqrt{3}\int_{0}^{\pi/6} (\sec^2\theta - 1)\, d\theta$$

$$= \sqrt{3}\Big[\tan\theta - \theta\Big]_{0}^{\pi/6} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$



$$\sec\theta = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{3}}$$

Las **sustituciones trigonométricas** pueden usarse para **evaluar las tres integrales listadas** en el **siguiente teorema**:

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN ESPECIALES ($a > 0$)

1. $$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + u\sqrt{a^2 - u^2}\right) + C$$

2. $$\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 - a^2} - a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right|\right) + C, \quad u > a$$

3. $$\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right|\right) + C$$

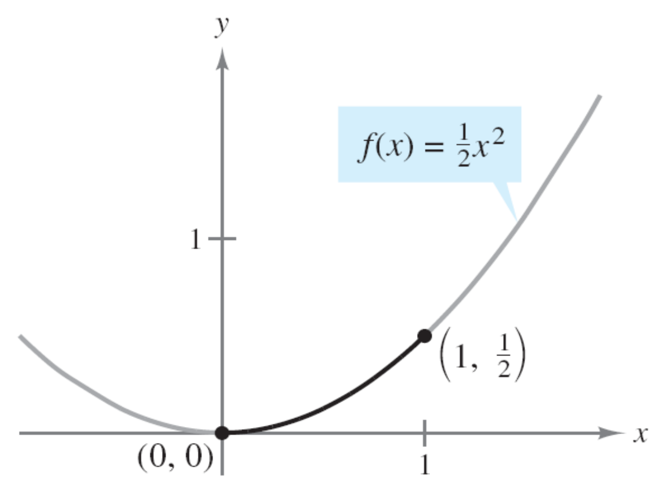
Ejemplo: Cálculo de la longitud de arco

Encontrar la longitud de arco de la gráfica de *f*(*x*) entre *x* = 0 y *x* = 1

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2$$

Se parte de la fórmula para calcular la longitud de arco (*s*) y se integra utilizando las sustituciones trigonométrica adecuadas:

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx && \text{Fórmula para su longitud de arco.} \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx && f'(x) = x. \\
&= \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta \, d\theta && \text{Sea } a = 1 \text{ y } x = \tan\theta. \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sqrt{2} + \ln\big(\sqrt{2} + 1\big)\Big] \approx 1.148
\end{aligned}$$



La longitud de arco de la curva para (0, 0) a $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

El **método de las fracciones simples o parciales** permite:

↓

descomponer una función racional en funciones racionales más simples para poder **aplicar** las **fórmulas básicas** de **integración**

DESCOMPOSICIÓN DE $N(x)/D(x)$ EN FRACCIONES SIMPLES

1. **Dividir en caso impropio:** Si $N(x)/D(x)$ es una fracción impropia (es decir, si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador), dividir el denominador en el numerador para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)} = (\text{a polinomio}) + \frac{N_1(x)}{D(x)}$$

donde el grado de $N_1(x)$ es menor del grado de $D(x)$. Entonces aplicar los pasos 2, 3 y 4 a la expresión racional propia $N_1(x)/D(x)$.

2. **Factorizar el denominador:** Factorizar completamente el denominador en factores de los tipos

$$(px + q)^m \qquad \text{y} \qquad (ax^2 + bx + c)^n$$

donde $ax^2 + bx + c$ es irreducible.

3. **Factores lineales:** Para cada factor lineal $(px + q)^m$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma siguiente de m fracciones.

$$\frac{A_1}{(px + q)} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px + q)^m}$$

4. **Factores cuadráticos:** Para cada factor cuadrático $(ax^2 + bx + c)^n$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma siguiente de n fracciones.

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Ejemplo: Evaluar la integral sin utilizar el método de la descomposición en fracciones parciales, y posteriormente volver a evaluarla utilizando dicho método

1. **Sin descomposición en fracciones parciales** → completar el cuadrado + cambio de variable trigonométrica

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int \frac{dx}{(x - 5/2)^2 - (1/2)^2} \qquad a = \tfrac{1}{2},\ x - \tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{2}\sec\theta.$$

$$= \int \frac{(1/2)\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(1/4)\tan^2\theta} \qquad dx = \tfrac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta.$$

$$= 2\int \csc\theta\,d\theta = 2\ln|\csc\theta - \cot\theta| + C = 2\ln\left|\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x+6}}\right| + C$$

$$= 2\ln\left|\frac{x-3}{\sqrt{x^2-5x+6}}\right| + C = 2\ln\left|\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}\right| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C = \ln|x-3| - \ln|x-2| + C$$

2. **Con descomposición en fracciones parciales**

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \ln|x-3| - \ln|x-2| + C$$

Estrategias para resolver la ecuación básica

Factores lineales

1. Sustituir en la ecuación básica las raíces de los distintos factores lineales.
2. Para factores lineales repetidos, usar los coeficientes lineales determinados en la estrategia 1 para reescribir la ecuación básica. Entonces sustituir otros valores convenientes de x y resolver para los coeficientes restantes.

Factores cuadráticos

1. Desarrollar la ecuación básica.
2. Agrupar términos atendiendo a las potencias de x.
3. Igualar los coeficientes de cada potencia para obtener un sistema de ecuaciones lineales conteniendo A, B, C, etcétera.
4. Resolver el sistema de ecuaciones lineales.

NOTA:

1. No es necesario usar siempre la técnica de las fracciones parciales en las funciones racionales, a veces la integral puede resolverse más fácilmente por otros métodos

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-4}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x-4}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x-4| + C$$

2. Si el integrando no está en la forma reducida, a veces reduciéndolo se puede eliminar la necesidad de las fraccione parciales

$$\int \frac{x^2-x-2}{x^3-2x-4}\,dx = \int \frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + C$$

3. Pueden usarse las fracciones parciales con algunos cocientes que contienen funciones trascendentes

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1)}\,dx = \int \frac{du}{u(u-1)} \qquad u = \operatorname{sen} x,\ du = \cos x\,dx$$

Ejemplo: Factores lineales repetidos

$$\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2}\,dx = \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x + 1} + \frac{9}{(x + 1)^2}\right) dx = \ln\left|\frac{x^6}{x + 1}\right| - \frac{9}{x + 1} + C$$

En primer lugar, como el **grado del denominador es mayor que el del numerador**, se **factoriza el denominador** (si no nos lo dieran ya factorizado):

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$$

Se incluye **una fracción *para cada potencia*** de *x* y (*x* + 1), **se reescribe el integrando**, se **calculan** los valores de ***A*, *B* y *C*** y finalmente se **resuelve la integral**

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx$$

$\Rightarrow$ ***A* = 6, *B* = -1 y *C* = 9**

Ejemplo: Factores cuadráticos y lineales distintos

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x}{x^2+4} + \frac{4}{x^2+4}\right) dx$$

$$= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln(x^2+4) + 2\arctan\frac{x}{2} + C$$

Se comprueba que en este caso, el grado del denominador es mayor que el del numerador. Si el denominador no está factorizado, se factoriza, se incluye **una fracción simple para cada factor**, se **calculan** los valores de ***A*, *B*, C y *D*** y finalmente, se **resuelve la integral**

$$(x^2 - x)(x^2+4) = x(x-1)(x^2+4)$$

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

***A* = 2, *B* = -2, *C* = 2 y *D* = 4**

Cuando utilizando las técnicas de integración estudiadas hasta el momento **no se consiguen resolver integrales que contienen funciones racionales de seno y coseno**, puede **probar** a utilizarse **la siguiente sustitución:**

SUSTITUCIÓN PARA FUNCIONES RACIONALES DE SENO Y COSENO

Para integrales que contienen funciones racionales de seno y coseno, la sustitución

$$u = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$$

hace que

$$\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2\,du}{1 + u^2}$$

Existen **TABLAS DE INTEGRACIÓN** que pueden utilizarse como **suplemento** (¡nunca como sustitución!) **a las técnicas de integración** estudiadas

- Algunas integrales de las tablas son de la forma

$$\int f(x)\,dx = g(x) + \int h(x)\,dx$$

Estas fórmulas de integración se llaman **fórmulas de reducción** porque **reducen una integral** dada **a la suma de una función y una integral más simple**

Ejemplo: Integración por tablas utilizando fórmulas de reducción → $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$

$$\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$$

$$\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$$

$$\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$$

$$\begin{aligned}\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx &= -x^3\cos x + 3\int x^2\cos x\,dx\\ &= -x^3\cos x + 3\left(x^2\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,dx\right)\\ &= -x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

RECORDAR…

- La definición de **integral definida** requiere que el **intervalo de integración** [*a*, *b*] sea **finito**

- **El teorema fundamental del cálculo**, por el que se **evalúan las integrales definidas**, requiere que ***f*** **sea continua** en [*a*, *b*]

- **¿Cómo se evalúan las integrales que no satisfacen estos requisitos?**

  INTEGRALES IMPROPIAS

  - Cualquiera de los dos **límites de integración son infinitos** y/o
  - ***f*** **tiene un número finito de discontinuidades infinitas** en el intervalo [*a*, *b*]

NOTA: Una función *f* tiene una discontinuidad infinita en *c* si, por la derecha o izquierda:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS CON LÍMITES DE INTEGRACIÓN INFINITOS

1. Si f es continuo en el intervalo $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Si f es continuo en el intervalo $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Si f es continuo en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

donde c es cualquier número real.

En los primeros dos casos, la integral impropia **converge** si el límite existe, en caso contrario, la integral impropia **diverge**. En el tercer caso, la integral impropia a la izquierda diverge si cualquiera de las integrales impropias a la derecha divergen.

Ejemplo: Una integral impropia divergente

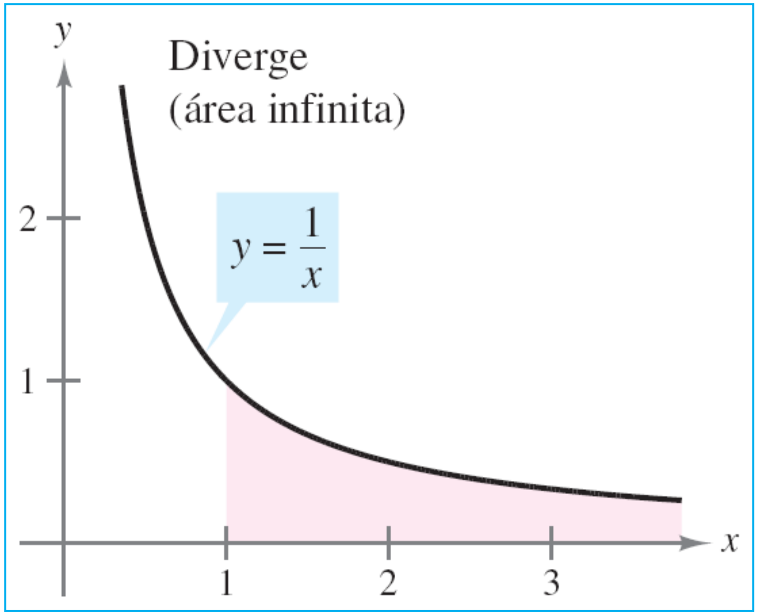
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$$ Tomar el límite $b \to \infty$.

$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln x\Big]_1^b$$ Aplicar la regla log.

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln b - 0)$$ Aplicar el teorema fundamental del cálculo.

$$= \infty$$ Evaluar el límite.

Esta región no acotada tiene un área infinita



Ejemplo: Usando la regla de L'Hôpital con una integral impropia

$$\int_1^{\infty} (1 - x)e^{-x}\, dx$$

En primer lugar, se usa la integración por partes, con $dv = e^{-x}\, dx$ y $u = (1 - x)$

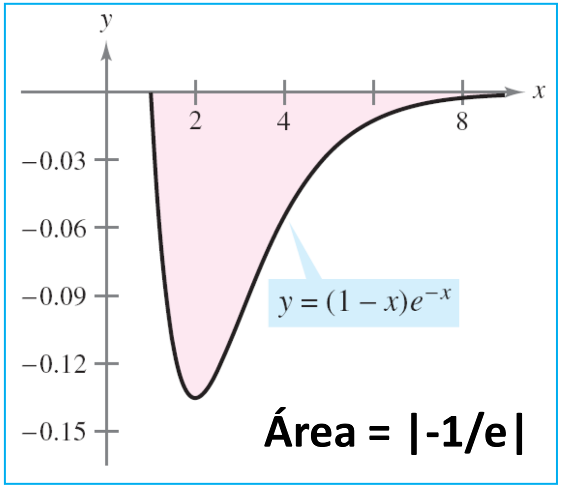
$$\boxed{\int (1 - x)e^{-x}\, dx = -e^{-x}(1 - x) - \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C = xe^{-x} + C}$$

Después, se aplica la definición de integral impropia

$$\boxed{\int_1^{\infty} (1 - x)e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \Big[xe^{-x} \Big]_1^b = \left(\lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^b} \right) - \frac{1}{e}}$$

Finalmente, se resuelve el límite utilizando la regla de L'Hôpital

$$\boxed{\lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^b} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b} = 0 \Rightarrow \int_1^{\infty} (1 - x)e^{-x}\, dx = -\frac{1}{e}}$$



DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS CON DISCONTINUIDADES INFINITAS

1. Si f es continuo en el intervalo $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

2. Si f es continuo en el intervalo $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. Si f es continuo en el intervalo $[a, b]$, excepto para algún c en (a, b) en que f tiene una discontinuidad infinita, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

En los primeros dos casos, la integral impropia **converge** si el límite existe, de otra forma, la integral impropia **diverge**. En el tercer caso, la integral impropia en la izquierda diverge si alguna de las integrales impropias a la derecha diverge.

Ejemplo:

Una integral impropia divergente

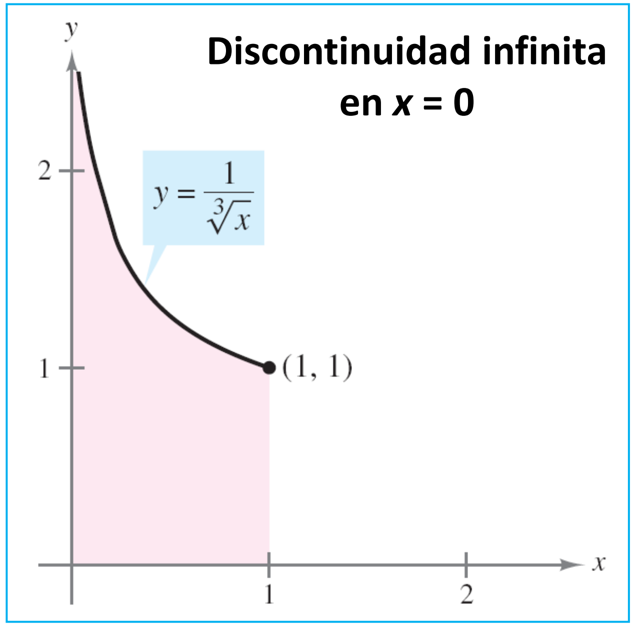
$$\int_0^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_b^2 = \lim_{b\to 0^+} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2b^2}\right) = \infty$$

Ejemplo:

Una integral impropia con una discontinuidad infinita

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \int_0^1 x^{-1/3}\,dx = \lim_{b\to 0^+} \left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_b^1$$

$$= \lim_{b\to 0^+} \frac{3}{2}(1 - b^{2/3}) = \frac{3}{2}$$



Ejemplo: Una integral doblemente impropia

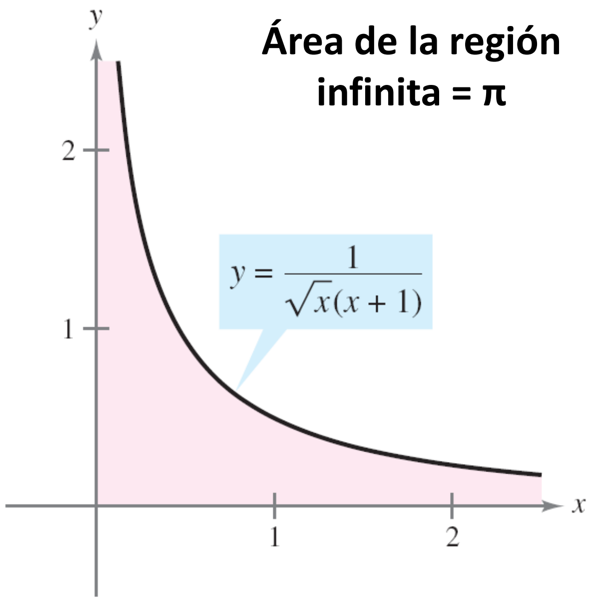
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

Esta integral tiene **un límite de integración es infinito** y el integrando tiene una **discontinuidad infinita** en el límite exterior de integración

Para evaluar la integral, ***se elige un punto conveniente*** (por ejemplo *x* = 1), se **reescribe la integral como suma de dos integrales**, **se integra y se toman los límites** oportunos

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\ &= \lim_{b\to 0^+}\Big[2\arctan\sqrt{x}\Big]_b^1 + \lim_{c\to\infty}\Big[2\arctan\sqrt{x}\Big]_1^c \\ &= 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Área de la región infinita = π



ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

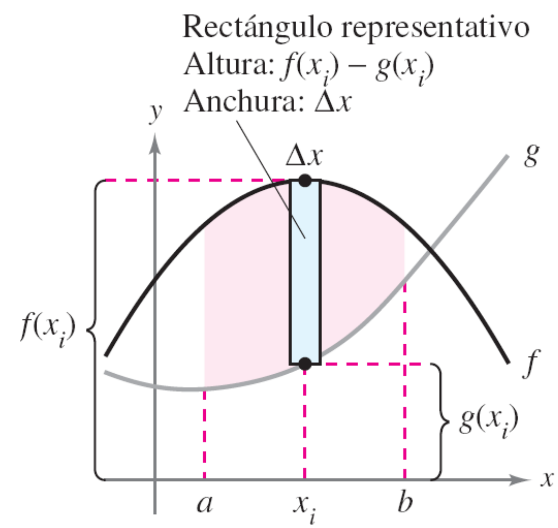
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Demostración:

Se puede dividir el intervalo $[a, b]$ en **n subintervalos** de **anchura Δx** y trazar un **rectángulo representativo** de **anchura Δx** y **altura $f(x_i) - g(x_i)$** donde x_i es un punto del *i-ésimo* intervalo

$$\Delta A_i = (\text{altura})(\text{anchura}) = [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$$

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

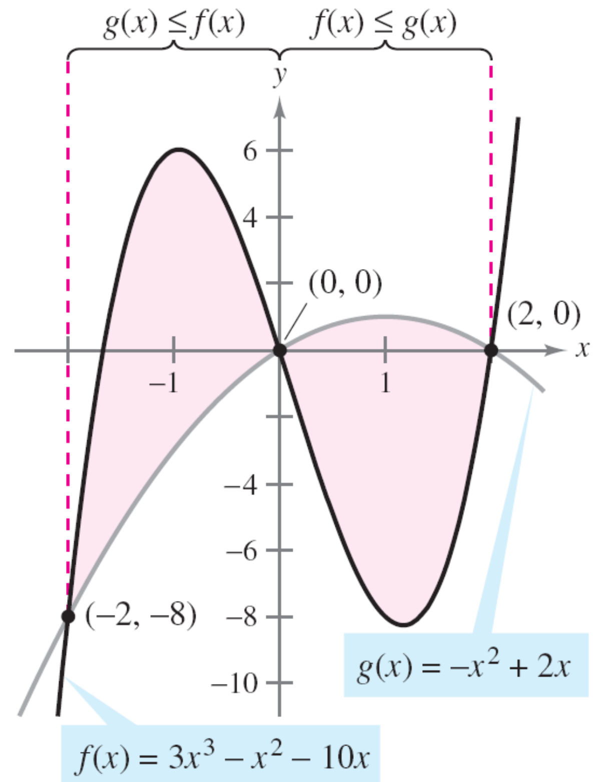


Ejemplo: Curvas que se intersecan en más de dos puntos

Hallar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$

Es necesario **igualar *f*(*x*) y *g*(*x*)** para encontrar las **intersecciones**

$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$	Igualar $f(x)$ a $g(x)$.
$3x^3 - 12x = 0$	Escribir en forma general.
$3x(x-2)(x+2) = 0$	Factorizar.
$x = -2, 0, 2$	Despejar para x.



$g(x) \leq f(x)$ en el intervalo [-2, 0] y $f(x) \leq g(x)$ en el intervalo [0, 2]

$$A = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)\,dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)\,dx$$
$$= \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right]_{0}^{2} = 24$$

Se necesitan dos integrales

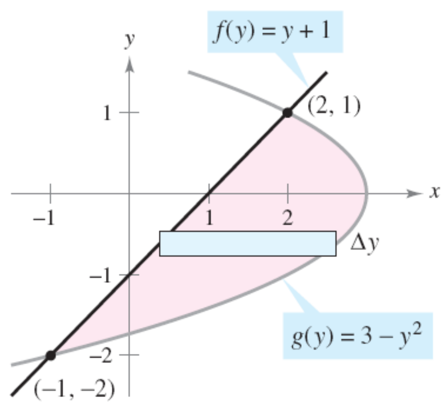
Ejemplo: Rectángulos representativos horizontales

Encontrar el área acotada por las gráfica de $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$

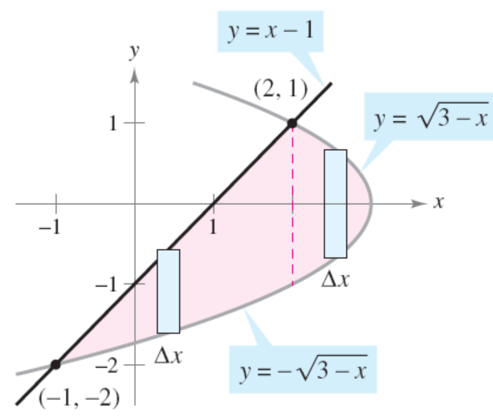
Consideramos $g(y) = 3 - y^2$ y $f(y) = y + 1$ → intersecciones en $y = -2$, $y = 1$

$f(y) \le g(y)$ en el intervalo considerado, por lo que:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} [(3 - y^2) - (y + 1)]\, dy \\ &= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\, dy \\ &= \left[\frac{-y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



Rectángulos horizontales (integración con respecto a y)



Rectángulos verticales (integración con respecto a x)

NOTA: Si hubiésemos integrado con respecto a x, hubiéramos necesitado dos integrales, ya que la frontera superior habría cambiado en $x = 2$, aunque el resultado final hubiera sido el mismo

La integral para calcular el área entre dos curvas se ha desarrollado utilizando un rectángulo como *elemento representativo:*

$A = (\text{altura})(\text{ancho})$ ⇨ $\Delta A = [f(x) - g(x)]\,\Delta x$ ⇨ $A = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

A PARTIR DE AHORA…

Para cada nueva aplicación de la integral que estudiemos, el **proceso** será similar:

- Se construirá un ***elemento representativo* adecuado** a partir de las **fórmulas previas al cálculo** que ya se conocen
- Cada **fórmula de integración** se obtendrá **sumando estos elementos representativos**

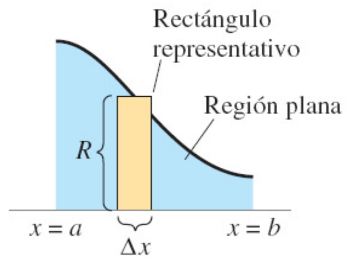
Fórmula conocida previa al cálculo ⇨ Elemento representativo ⇨ Nueva fórmula de integración

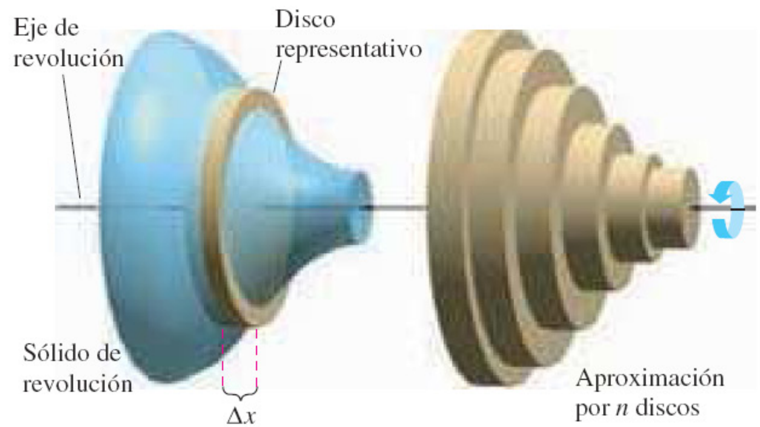
Si una **región en el plano gira alrededor de una recta**, el sólido resultante es un **sólido de revolución**, y la recta se llama **eje de revolución**

Ejemplo sencillo: Volumen de un disco de radio *R* y anchura *w* → $\pi R^2 w$

Volumen de un sólido general de revolución usando el método de los discos:

1. **Considerar un sólido de revolución** formado al **girar una región plana alrededor de un eje**
2. **Considerar un *rectángulo representativo*** de la región plana → si el ***rectángulo representativo* gira alrededor del eje** genera un ***disco representativo*** cuyo volumen es: $\Delta V = \pi R^2 \Delta x$
3. **Aproximar el volumen del sólido** por el de los ***n* discos de anchura Δx y radio $R(x_i)$** y **llevar al límite:**





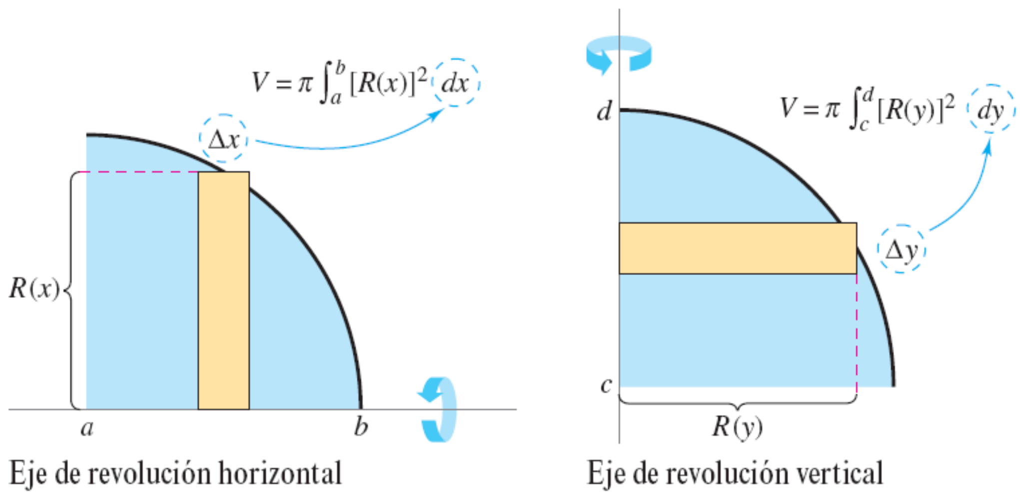
Volumen del disco

$$= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \, \Delta x = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$$

Esquemáticamente, el **método de los discos** se entiende como:

Fórmula conocida		*Elemento representativo*		*Nueva fórmula de integración*
Volumen del disco $V = \pi R^2 w$	⇨	$\Delta V = \pi[R(x_i)]^2\, \Delta x$	⇨	Sólido de revolución $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$

NOTA: también puede usarse un eje de revolución vertical



Ejemplo: Eje de revolución alrededor de una recta que no es un eje de coordenadas

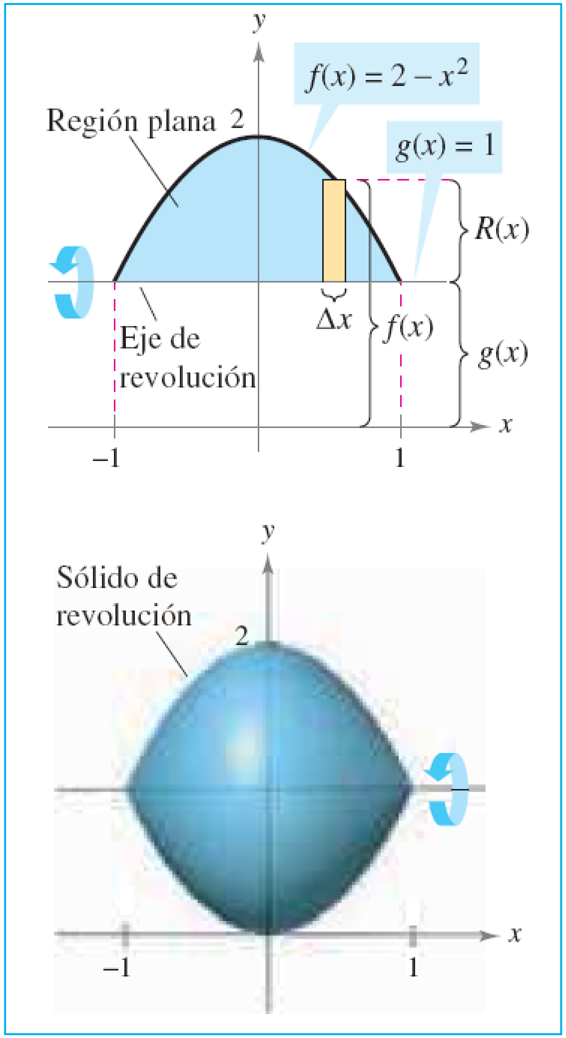
Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$ alrededor de la recta $y = 1$

Al igualar $f(x)$ y $g(x)$ se determina que **las dos gráficas intersecan cuando $x = \pm 1$ → para encontrar el radio $R(x)$** es necesario **restar $g(x)$ de $f(x)$:**

$$R(x) = f(x) - g(x) = (2 - x^2) - 1 = 1 - x^2$$

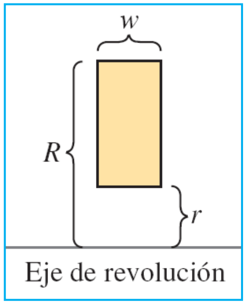
Finalmente, **se integra entre -1 y 1:**

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\,dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx = \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \frac{16\pi}{15}$$



Método de las arandelas (anillos): generalización del método de los discos para cubrir **sólidos de revolución huecos**

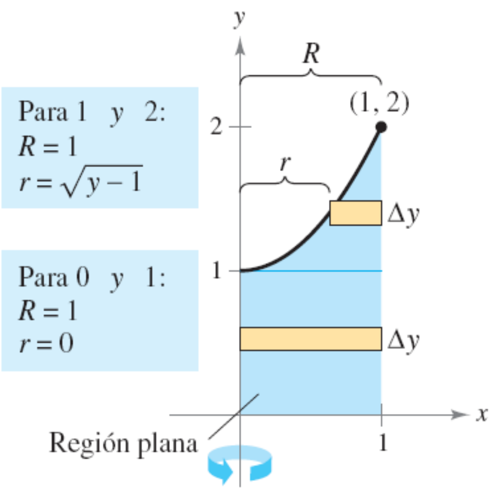
- **Volumen de la arandela** (radio exterior R, radio interior r) → $\pi\,(R^2 - r^2)\,w$
- **Volumen del sólido de revolución:** $V = \pi \int_a^b \left([R(x)]^2 - [r(x)]^2\right) dx$



Ejemplo: integración con respecto a y, con dos integrales

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje y

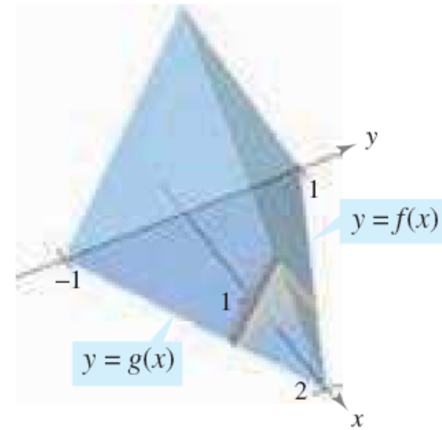
$$V = \pi \int_0^1 (1^2 - 0^2)\,dy + \pi \int_1^2 \left[1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right] dy$$
$$= \pi \int_0^1 1\,dy + \pi \int_1^2 (2 - y)\,dy = \frac{3\pi}{2}$$



Sólidos con secciones transversales conocidas:

Con el **método de los discos** se puede encontrar el **volumen de un sólido** teniendo una **sección transversal con área conocida**

1. Para secciones transversales de área $A(x)$ perpendiculares al eje x, Volumen $= \int_a^b A(x)\,dx$
2. Para secciones transversales de área $A(y)$ perpendiculares al eje y, Volumen $= \int_c^d A(y)\,dy$



Las secciones transversales son triángulos equiláteros

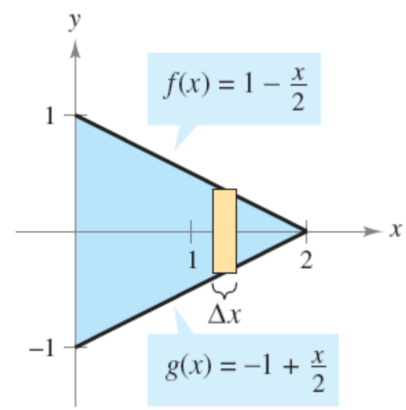
Ejemplo: Secciones transversales triangulares

$$\text{Base} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = 2 - x$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2$$

***x* varía entre 0 y 2**

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(2 - x)^2\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



Base triangular en el plano *xy*

El método de las capas es un **método alternativo** para calcular el **volumen de un sólido de revolución → utiliza capas cilíndricas**

Ejemplo sencillo: volumen de una capa de un cilindro

- Considerar un ***rectángulo representativo*** de anchura *w* y altura *h* (*p* es la distancia entre el eje de revolución y el centro del rectángulo)
- Considerar que este **rectángulo gira alrededor de su eje de revolución** formando una **capa cilíndrica** (o tubo) **de espesor *w*** cuyo volumen es:

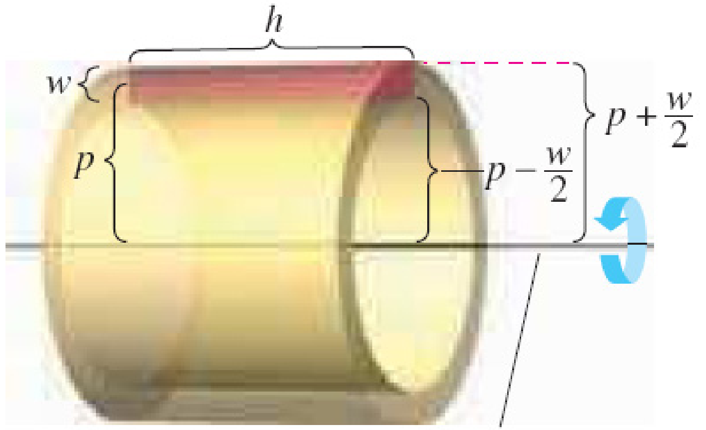
Volumen de la capa

$$= (\text{volumen del cilindro}) - (\text{volumen del hueco})$$

$$= \pi\left(p + \frac{w}{2}\right)^2 h - \pi\left(p - \frac{w}{2}\right)^2 h$$

$$= 2\pi phw$$

$$= 2\pi\,(\text{radio medio})(\text{altura})(\text{espesor})$$



Volumen de un sólido general de revolución usando el método de las capas:

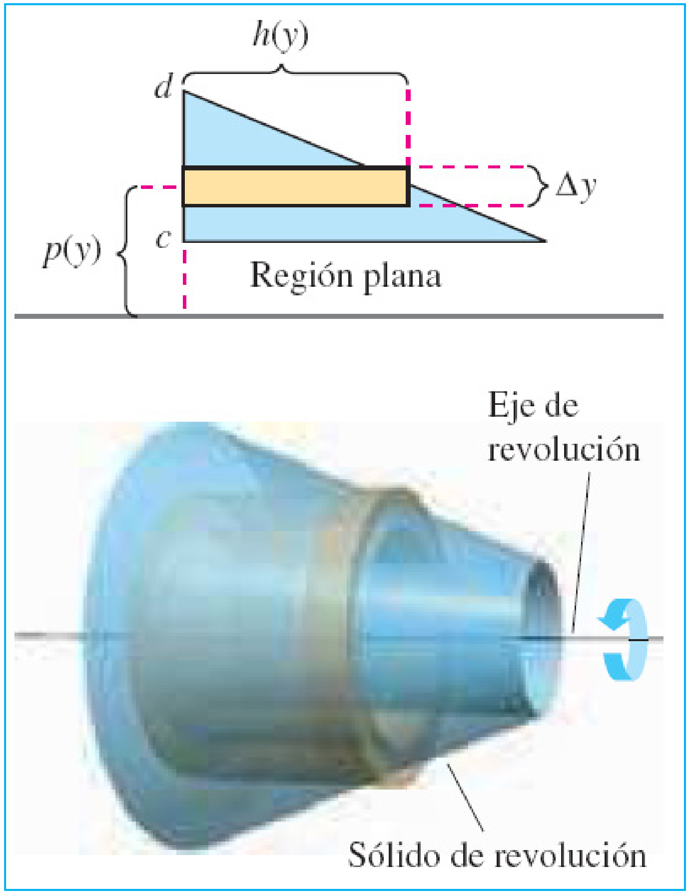
1. **Considerar** un **rectángulo horizontal** de **anchura Δ*y***

2. **Considerar que la región plana gira alrededor de una recta paralela al eje *x*** → el rectángulo genera una ***capa representativa*** cuyo volumen es:

$$\Delta V = 2\pi[p(y)h(y)]\,\Delta y$$

3. **Aproximar el volumen del sólido** por ***n*** **capas de espesor Δ*y***, de **altura *h*(*y*$_i$)** y **radio medio *p*(*y*$_i$)** y **llevar al límite:**

$$\text{Volumen del sólido} = \lim_{\|\Delta\|\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} [p(y_i)h(y_i)]\,\Delta y = 2\pi \int_c^d [p(y)h(y)]\,dy$$



Ejemplo: Uso del método de las capas para encontrar un volumen

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por la gráfica de $x = e^{-y^2}$ y el eje *y* (0 ≤ y ≤ 1) alrededor del eje *x*

El **eje de revolución es horizontal**, por tanto, para utilizar el **método de las capas**, hay que usar un ***rectángulo representativo*** **horizontal**

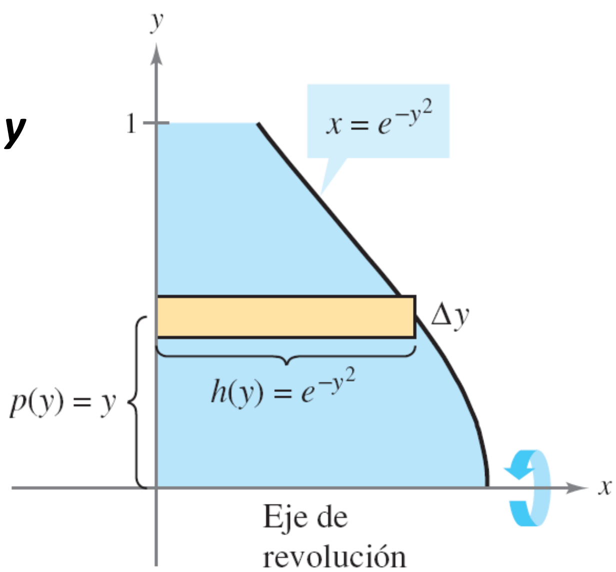
La **anchura Δ*y*** indica que *y* es la variable de integración

La **distancia al centro del rectángulo** del eje de revolución es ***p*(*y*) = *y***

La **altura del rectángulo** es h(y) = e^{-y^2}

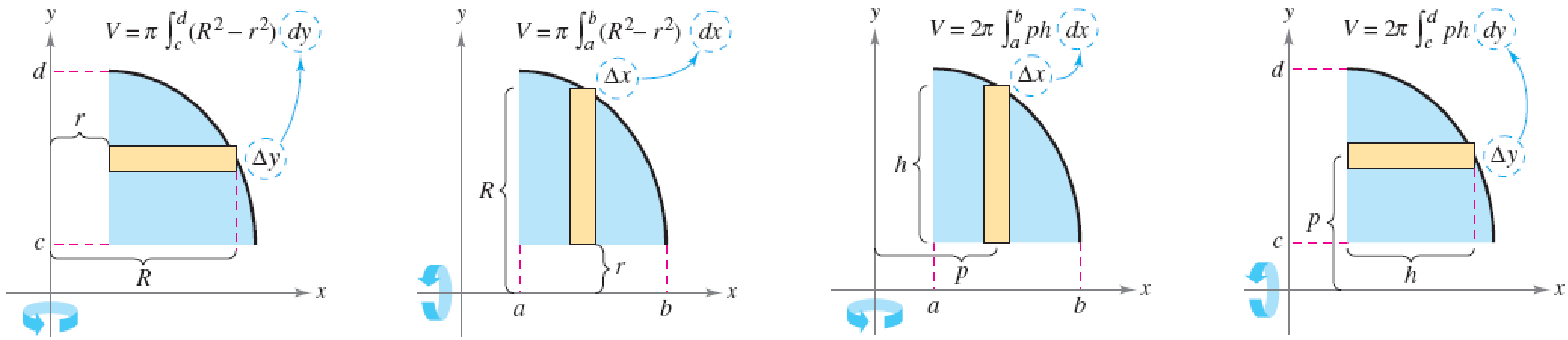
$$V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\,dy = 2\pi \int_0^1 ye^{-y^2}\,dy$$
$$= -\pi\left[e^{-y^2}\right]_0^1 = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 1.986$$

→ ***y* varía entre 0 y 1**



Los métodos de los discos y de las capas pueden distinguirse porque:

- En el **método de los discos**, ***el rectángulo representativo*** siempre es **perpendicular al eje de revolución**
- En el **método de las capas**, el ***rectángulo representativo*** siempre es **paralelo al eje de revolución**



Eje de revolución vertical | Eje de revolución horizontal | Eje de revolución vertical | Eje de revolución horizontal

Método del disco: El rectángulo representativo es perpendicular al eje de revolución

Método de las capas: El rectángulo representativo es paralelo al eje de revolución

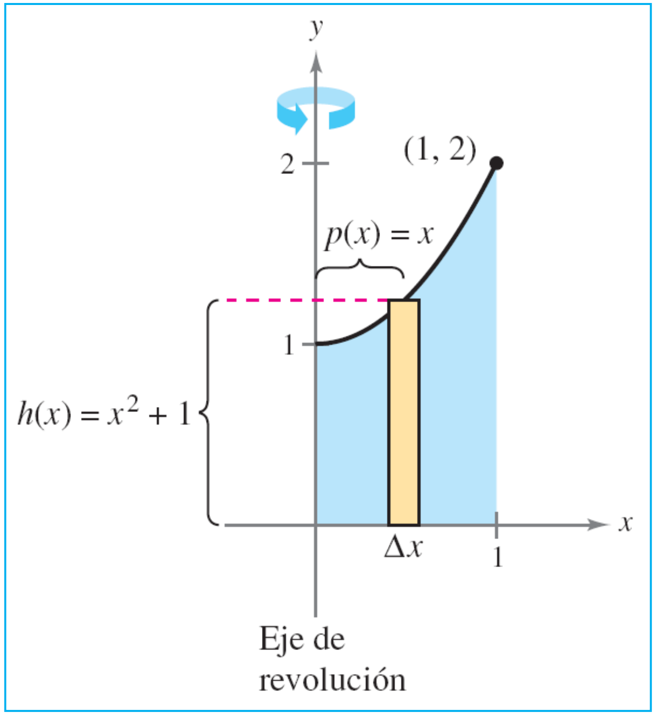
Ejemplo: Caso en que es preferible el método de las capas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje y

- Al resolver este mismo ejemplo con el **método de las arandelas** vimos que eran necesarias **dos integrales** para determinar el volumen del sólido

- Si aplicamos el **método de las capas**, solamente es necesaria **una integral** para encontrar el volumen

$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 x(x^2 + 1)\,dx$$
$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}$$



Definimos **curva rectificable** como aquella que tiene una **longitud de arco finita**

NOTA: Una **condición suficiente** para que la gráfica de una función ***f* sea rectificable** entre (*a*, *f*(*a*)) y (*b*, *f*(*b*)) es que ***f’* sea continua sobre [*a*, *b*]** → dicha función es **continuamente derivable** sobre [*a*, *b*] y su gráfica en este intervalo es una **curva suave**

Considerar una función ***y* = *f*(*x*)** tal que **es continuamente derivable** en [*a*, *b*] → se puede **aproximar la gráfica de *f* por *n* segmentos de recta** (de igual ancho), de manera que:

$$s \cong \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,(\Delta x_i)$$

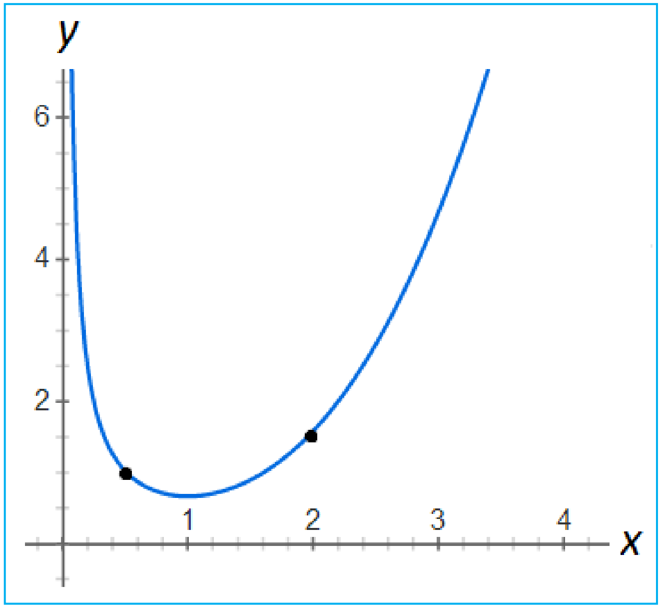
Utilizando el **teorema del valor medio para definir *f’*(*c*$_i$)** y llevando la expresión anterior al **límite**, se define la **LONGITUD DE ARCO de *f* entre *a* y *b* como:**

$$s = \lim_{\|\Delta \to 0\|} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,(\Delta x_i) = \lim_{\|\Delta \to 0\|} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(\Delta x_i) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

siendo $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) \rightarrow \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$

Ejemplo:

Encontrar la longitud de arco de $f(x)$ en el intervalo [1/2, 2]



$$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

En primer lugar, **se calcula $f'(x)$:**

$$f'(x) = \frac{3x^2}{6} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Y después, **se calcula la longitud de arco** buscada:

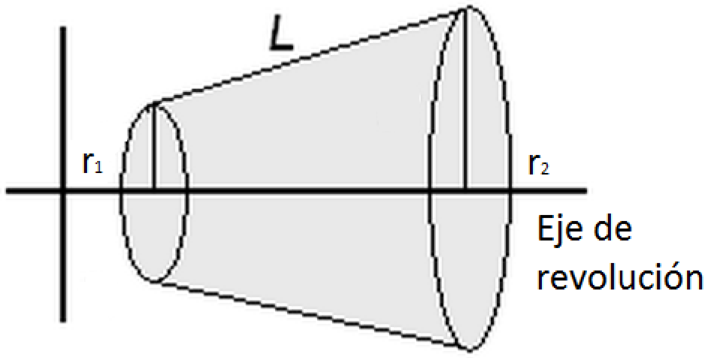
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{33}{16}$$

CEU Universidad San Pablo

Si la **gráfica de una función continua gira alrededor de una recta**, la **superficie resultante** es una **superficie de revolución**

Ejemplo sencillo:

- Considerar el segmento de la recta de la figura, donde *L* es la longitud del segmento de la recta
- r_1 es el radio en el extremo izquierdo del segmento de la recta y r_2 es el radio en el extremo derecho
- Cuando el segmento de la recta gira alrededor de su eje de revolución:



Área lateral del tronco = $S = 2\pi r L$

donde $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$

Área de una superficie de revolución II

Suponer que gráfica de una *función f*, que tiene una **derivada continua en el intervalo [*a*, *b*],** se **gira alrededor del eje *x*** para formar una superficie de revolución:

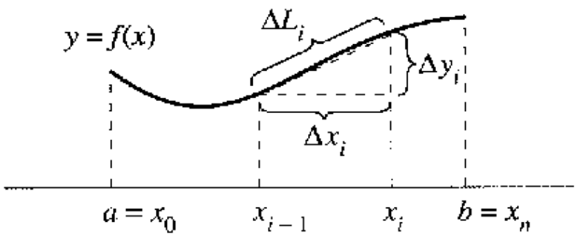
Sea **Δ una partición de [*a*, *b*],** con ***n* subintervalos de anchura Δx_i**, entonces el segmento de la recta de **longitud ΔL_i** genera un tronco de un cono

Sea r_i el radio medio de este cono, por el **teorema del valor intermedio**, existe un punto d_i (en el *i-ésimo* intervalo) tal que $r_i = f(d_i)$ de manera que el área de la **superficie lateral ΔS_i del tronco** es:

$$\Delta S_i = 2\pi r_i \Delta L_i = 2\pi f(d_i)\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = 2\pi f(d_i)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i$$

Utilizando el **teorema del valor medio** sabemos que $f'(c_i) = \Delta y_i / \Delta x_i$ y aproximando el **área total** como la **suma de las áreas** generadas por cada subintervalo considerado y **llevando la expresión al límite**, tenemos que **el área *S* de la superficie de revolución considerada es:**

$$S = 2\pi \lim_{\|\Delta \to 0\|} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$



NOTA: Si en vez de girar alrededor del eje *x*, *f* gira alrededor de cualquier otro eje horizontal, la expresión se puede generalizar, teniendo en cuenta que *r*(*x*) es la distancia entre la gráfica de *f* y el eje de revolución considerado

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

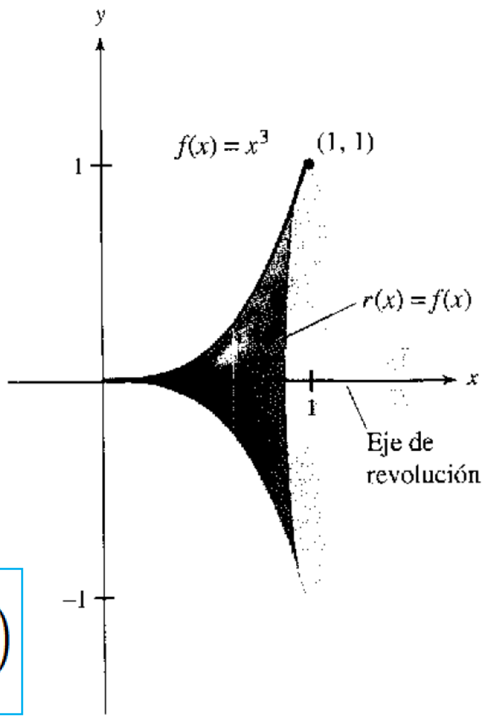
Ejemplo: Área de una superficie de revolución

Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de *f*(*x*) en el intervalo [0, 1] alrededor del eje *x*

$f(x) = x^3$

En este caso, como *f* gira alrededor del eje *x* → *r*(*x*) = *f*(*x*)

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1 + [3x^2]^2}\, dx = \frac{\pi}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$



El **TRABAJO** determina la **energía necesaria para realizar una tarea** y en general, **es realizado por una fuerza** (constante o variable) **cuando ésta desplaza un objeto**

DEFINICIÓN DE TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE
Si un objeto es desplazado una distancia D en la dirección de una fuerza constante aplicada F, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza se define como $W = FD$.

Ejemplo: Levantamiento de un objeto

Determinar el trabajo realizado al levantar un objeto de 50 Kg a 4 metros:

$W = F \cdot D = P \cdot D = m \cdot g \cdot D = 50\ \text{Kg} \cdot 9.81\ \text{m/s}^2 \cdot 4\ \text{m} = 1962\ \text{Kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 = 1962\ \text{J}$

NOTA:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \left(\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\cdot\mathrm{m} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

DEFINICIÓN DEL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Si un objeto es desplazado a lo largo de una recta por una fuerza continuamente variable $F(x)$, entonces el **trabajo** W realizado por la fuerza cuando el objeto es desplazado de $x = a$ hasta $x = b$ es

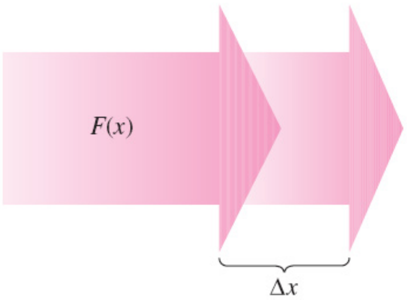
$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \int_a^b F(x)\, dx$$

Demostración:

Se divide al intervalo [*a*, *b*] en *n* subintervalos iguales de anchura Δx_i → en el *i-ésimo* intervalo:

$$\Delta W_i = F(c_i)\, \Delta x_i$$

Se aproxima el trabajo total y después se lleva la expresión al límite:



$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\, \Delta x_i = \int_a^b F(x)\, dx$$

LEYES FÍSICAS BÁSICAS

1. **Ley de Hooke:** La fuerza *F* requerida para comprimir o estirar un resorte o muelle (dentro de sus límites elásticos) es proporcional a la distancia *d* que el resorte es comprimido o estirado de su longitud, siendo *k* la constante de proporcionalidad (del resorte)

$$F = kd$$

2. **Ley de Newton de gravitación universal:** La fuerza *F* de atracción entre dos partículas de masas m_1 y m_2 es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia *d* entre las dos partículas

$$F = k\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

3. **Ley de Coulomb:** La fuerza *F* entre dos cargas q_1 y q_2 en el vacío es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia *d* entre las dos cargas

$$F = k\frac{q_1 q_2}{d^2}$$

Ejemplo: Compresión de un resorte o muelle

Una fuerza de 750 libras comprime un resorte 3 pulgadas de su longitud natural de 15 pulgadas

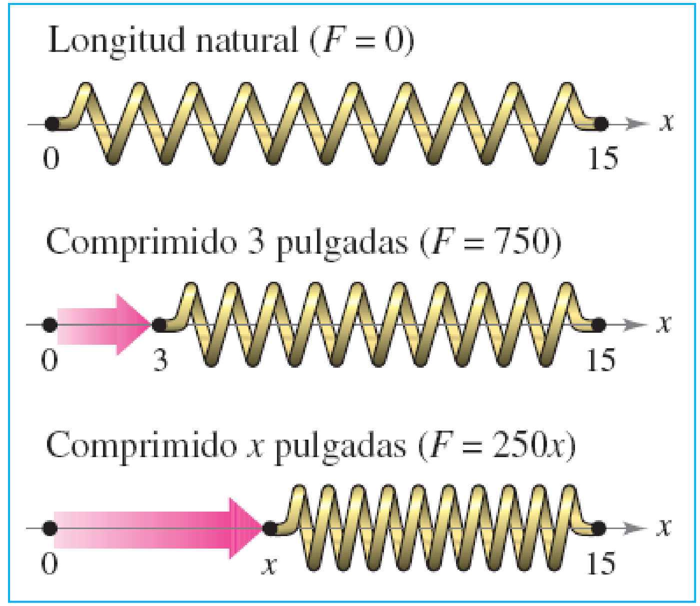
Encontrar el trabajo realizado al comprimir el resorte 3 pulgadas adicionales

- Por la **ley de Hooke**, $F(x) = kx$
- Se tiene que: $F(3) = 750 = 3k \rightarrow k = 250 \rightarrow F(x) = 250x$
- Para encontrar el **incremento de trabajo**, se puede **asumir que la fuerza requerida para comprimir el resorte un pequeño Δ*x* es casi constante**, por lo que:

$$\Delta W = (\text{fuerza})(\text{incremento de distancia}) = (250x)\,\Delta x$$

- Calculamos el **trabajo total:**

$$W = \int_a^b F(x)\,dx = \int_3^6 250x\,dx = 3375 \text{ libras-pulgadas}$$



La **masa** es una medida de **resistencia de un cuerpo al cambiar su estado de movimiento**, y es **independiente del sistema gravitatorio** particular en el que se encuentre

TABLA DE MEDIDAS DE MASA Y FUERZA Y FACTORES DE CONVERSIÓN:

Sistema de medida	Medida de masa	Medida de fuerza
Estados Unidos	Slug	Libra = (slug)(pies/s^2)
Internacional	Kilogramo	Newton = (kilogramo)(m/s^2)
C-G-S	Gramo	Dina = (gramo)(cm/s^2)

Conversión:

1 libra = 4.448 newtons	1 slug = 14.59 kilogramos
1 newton = 0.2248 libras	1 kilogramo = 0.06852 slug
1 dina = 0.000002248 libras	1 gramo = 0.00006852 slug
1 dina = 0.00001 newton	1 pie = 0.3048 metro

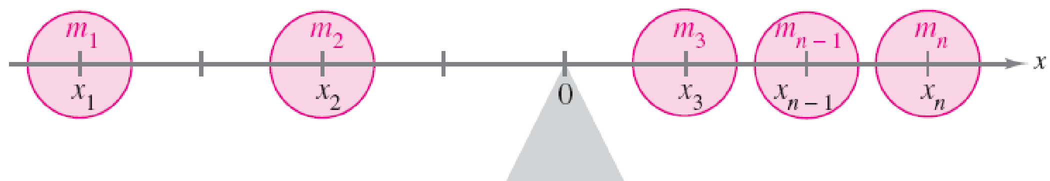
Centro de masa de un sistema unidimensional

El **momento de la masa *m* sobre el punto *P***, siendo *x* posición de *m* respecto a *P*, es:

$$\text{Momento} = mx$$

Para generalizar esta definición, se puede introducir una recta de coordenadas con el origen en el punto de apoyo → la tendencia del sistema a girar sobre el origen en el **momento respecto al origen**, y se define como:

$$M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdot \cdot \cdot + m_nx_n$$



Si $\mathbf{M_0 = 0}$ el **sistema está en equilibrio** → para un **sistema que no está en equilibrio**, el **centro de masa** es el punto en el que hay que colocar el **punto de apoyo para lograr el equilibrio**

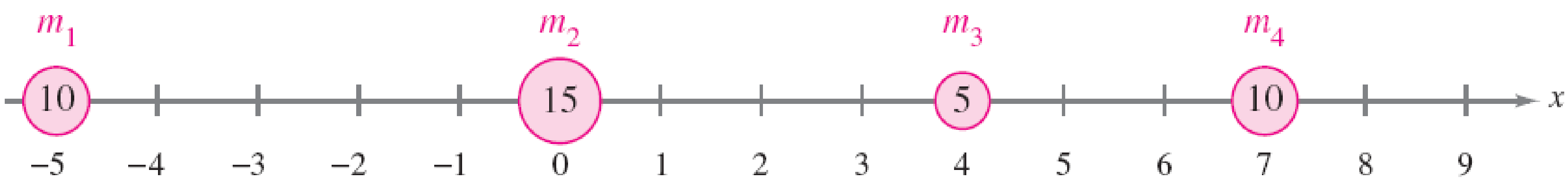
$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\text{momento del sistema respecto del origen}}{\text{masa total del sistema}}$$

MOMENTOS Y CENTROS DE MASA: SISTEMA UNIDIMENSIONAL

Sean las masas puntuales m_1 $m_2, \ldots, m_n$ localizada en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. El **momento respecto del origen** es $M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$.
2. El **centro de masa** es $\bar{x} = \dfrac{M_0}{m}$ donde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ es la **masa total** del sistema.

Ejemplo: Centro de masa de un sistema lineal (unidimensional)



$$M_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 10(-5) + 15(0) + 5(4) + 10(7) = 40$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{40}{40} = 1}$$

Centro de masa de un sistema bidimensional

El concepto de **momento** se puede extender a **dos dimensiones** considerando un **sistema de masas localizado en el plano *xy*** en los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), … (x_n, y_n) → **se definen dos momentos**, uno con **respecto al eje *x*** y otro con **respecto al eje *y***

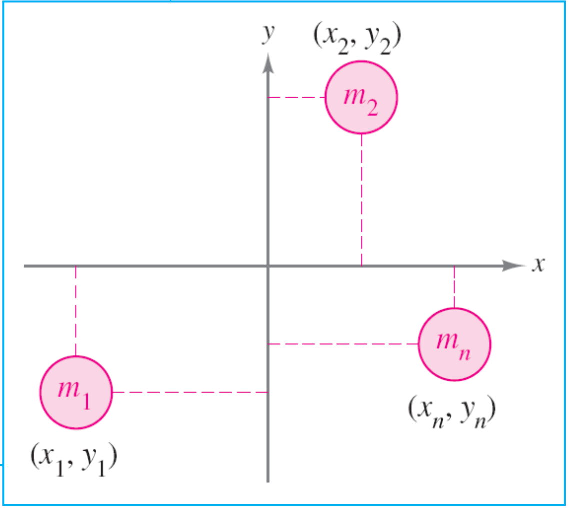
MOMENTOS Y CENTRO DE MASA: SISTEMA BIDIMENSIONAL

Sean las masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$, localizadas en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

1. El **momento respecto al eje *y*** es $M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n$.
2. El **momento respecto al eje *x*** es $M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n$.
3. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ (o **centro de gravedad**) es

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ es la **masa total** del sistema.



NOTA: En general, el **momento sobre una recta** es la **suma del producto de las masas y las *distancias dirigidas*** de los puntos de la recta

$$\text{Momento} = m_1(y_1 - b) + m_2(y_2 - b) + \cdot\cdot\cdot + m_n(y_n - b) \quad \text{Recta horizontal } y = b.$$
$$\text{Momento} = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - a) + \cdot\cdot\cdot + m_n(x_n - a) \quad \text{Recta vertical } x = a.$$

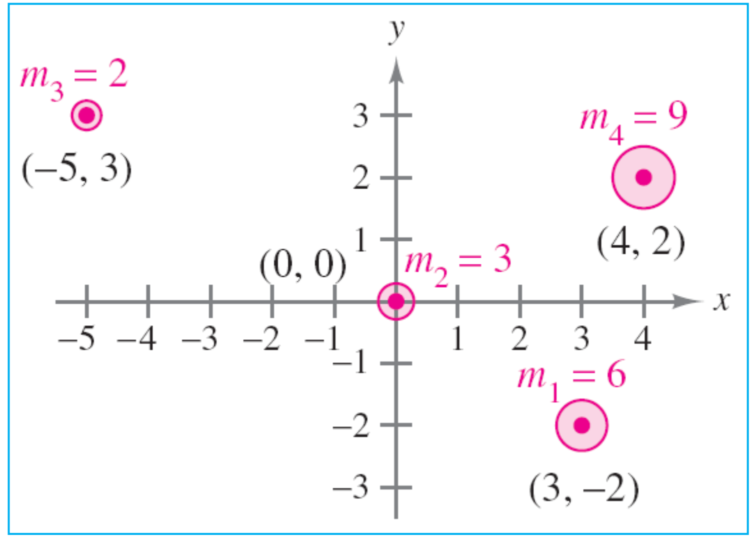
Ejemplo: Centro de masa de un sistema bidimensional

Encontrar el centro de masa de un sistema de masas puntuales $m_1 = 6$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$ y $m_4 = 9$ localizadas en: (3, -2), (0, 0), (-5, 3) y (4, 2)

$$\begin{aligned} m &= 6 + 3 + 2 + 9 = 20 \\ M_y &= 6(3) + 3(0) + 2(-5) + 9(4) = 44 \\ M_x &= 6(-2) + 3(0) + 2(3) + 9(2) = 12 \end{aligned}$$

Por lo que:

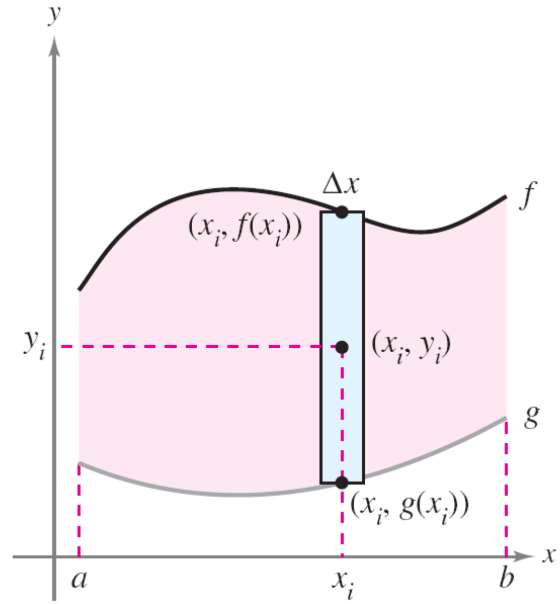
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$



Centro de masa de una lámina plana (punto de equilibrio)

La **masa de una región plana de densidad uniforme *ρ***, limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$ y $a \leq x \leq b$ (siendo f y g continuas tal que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$) es:

$$m = (\text{densidad})(\text{área}) = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \rho A$$



Para encontrar el **centro de masa de la lámina**, se divide el intervalo $[a, b]$ en ***n* subintervalos de igual Δ*x*** → para el ***i-ésimo* intervalo:**

$$m_i = (\text{densidad})(\text{área}) = \underbrace{\rho}_{\text{Densidad}} \underbrace{[f(x_i) - g(x_i)]}_{\text{Altura}} \underbrace{\Delta x}_{\text{Ancho}}$$

Considerando esta masa localizada en el centro (x_i, y_i) del rectángulo, la distancia dirigida del eje x a (x_i, y_i) es $y_i = [f(x_i) + g(x_i)]/2$ → el **Momento (M_{ix})** respecto del eje x es:

$$\text{Momento} = (\text{masa})(\text{distancia}) = m_i y_i = \rho[f(x_i) - g(x_i)]\, \Delta x \left[\frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\right]$$

Centro de masa de una lámina plana (punto de equilibrio)

Al **sumar los momentos y tomar el límite** tenemos que:

MOMENTOS Y CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA PLANA

Sea f y g funciones continuas tal que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, y considerar la lámina plana de densidad uniforme ρ limitada por las gráficas

$y = f(x)$, $y = g(x)$ y $a \leq x \leq b$.

1. Los **momentos respecto al eje x y y** son

$$M_x = \rho \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2}\right][f(x) - g(x)]\, dx$$

$$M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx.$$

2. El **centro de masa** $(\bar{x}, \bar{y})$ está dado por $\bar{x} = \frac{M_y}{m}$ y $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$, donde $m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ es la masa de la lámina.

Ejemplo: Centroide de una región plana

NOTA: El centro de masa de una lámina de densidad uniforme sólo depende de la forma de la lámina y no se su densidad. En estos casos, el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ se llama **centroide** de la región

Encontrar el centroide de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$

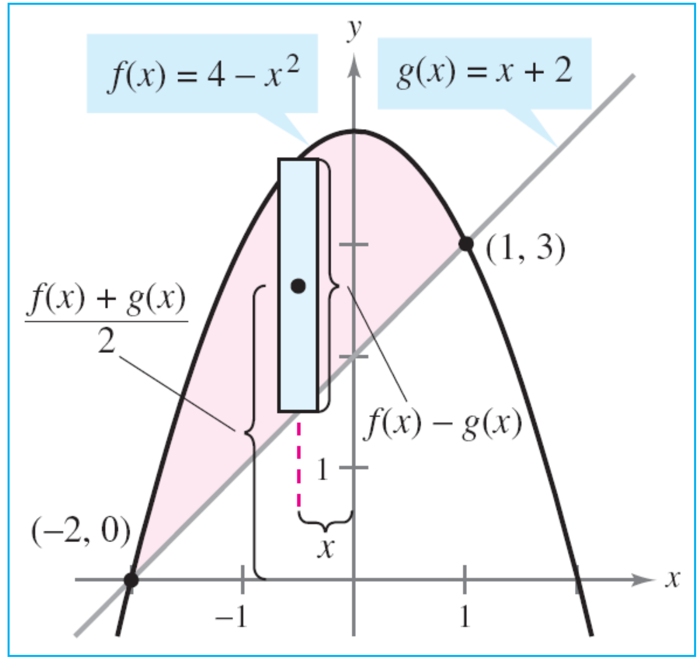
Las **dos gráficas se cortan en los puntos (-2, 0) y (1, 3),** por lo que el área de la **región que delimitan** es:

$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx = \frac{9}{2}$$

El centroide de esta región, se calcula entonces como:

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} x[(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx = -\frac{1}{2}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} \left[\frac{(4 - x^2) + (x + 2)}{2}\right][(4 - x^2) - (x + 2)]\, dx = \frac{12}{5}$$



TEOREMA DE PAPPUS

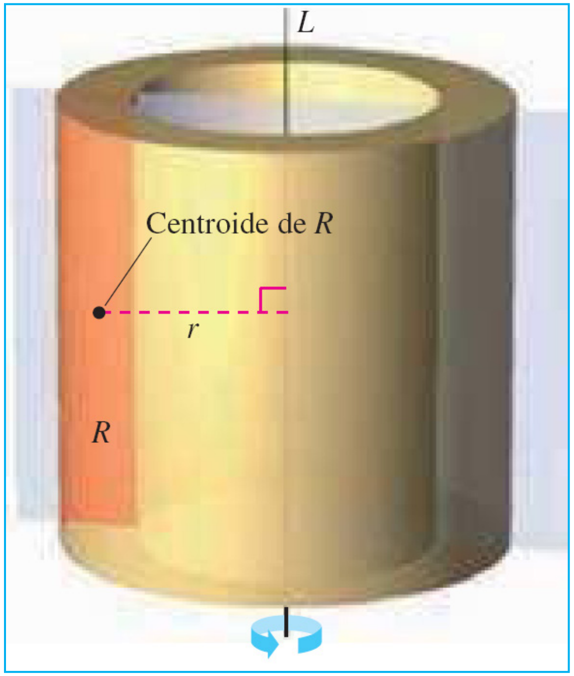
Sea *R* una región del plano y sea *L* una recta en el mismo plano tal que *L* no interseca en el interior de *R*

Si *r* es la distancia entre el centroide de *R* y la recta, entonces el volumen *V* del sólido de revolución formado al girar R sobre la recta es:

$$V = 2\pi r A$$

donde *A* es el área de *R*

NOTA: Observar que $2\pi r$ es la distancia recorrida por el centroide cuando la región gira en torno a la recta

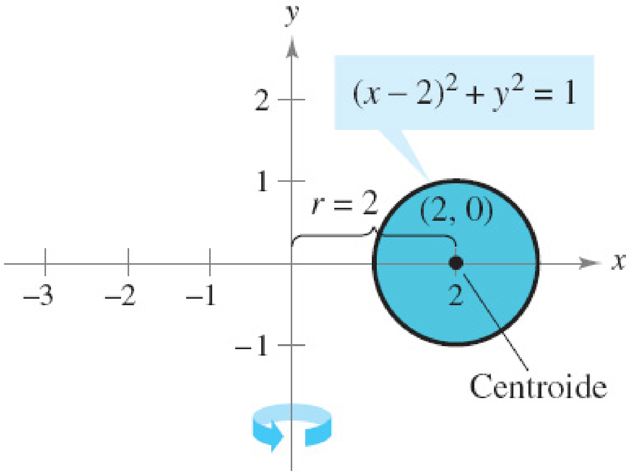


Ejemplo: Encontrar el volumen de un toroide usando el teorema de Pappus

El toroide se forma al girar la región circular limitada por $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y

- El **centroide de la región circular es (2, 0)** → la distancia entre el centroide y el eje de revolución es $\boldsymbol{r = 2}$
- El área de la región circular es $\boldsymbol{A = \pi r_c^2 = \pi}$ (ya que el radio de la región circular es 1, $r_c = 1$)
- Aplicando el teorema de Pappus, el volumen del toroide es: $\boldsymbol{V = 2\pi r A = 2\pi(2)(\pi) = 4\pi^2}$

Toro



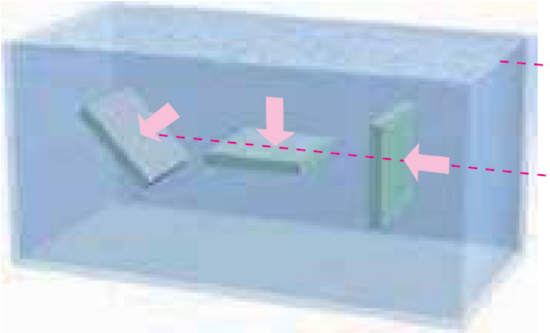
La **presión** se define como la **fuerza ejercida por unidad de área en la superficie de un cuerpo**

DEFINICIÓN DE PRESIÓN DE FLUIDO
La presión en un objeto a la profundidad h en un líquido es Presión $= P = wh$ donde w es la densidad de peso del líquido por unidad de volumen.

Cuando se calcular la **presión de un fluido**, se puede usar una **importante ley física** denominada **PRINCIPIO DE PASCAL** → la **presión ejercida por un fluido** a una **profundidad *h*** es **exactamente igual en todas direcciones:**

Fuerza del fluido = *F* = *PA* = (presión) (área)

La presión en h es la misma para los tres objetos →



Suponer que una **lámina vertical se sumerge** en un **fluido de peso *w*** (por unidad de volumen) → para determinar la **fuerza total ejercida sobre una cara entre la profundidad *c* y la profundidad *d***, se puede **dividir** el intervalo [*c*, *d*] en ***n* subintervalos de anchura Δ*y***, de manera que:

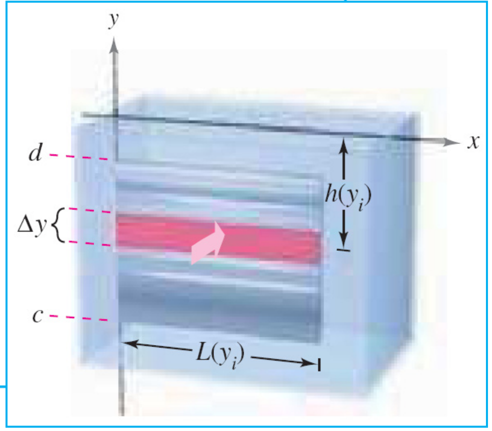
$$\Delta F_i = w(\text{profundidad})(\text{área}) = wh(y_i)L(y_i)\,\Delta y \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = w\sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\,\Delta y$$

DEFINICIÓN DE FUERZA EJERCIDA POR UN FLUIDO

La **fuerza *F* ejercida por un fluido** de peso-densidad constante w (por unidad de volumen) sobre una región plana vertical sumergida desde $y = c$ hasta $y = d$ es

$$F = w \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(y_i)L(y_i)\,\Delta y$$
$$= w\int_c^d h(y)L(y)\,dy$$

donde $h(y)$ es la profundidad del fluido en y y $L(y)$ es la longitud horizontal de la región en y



Ejemplo: Fuerza de un fluido sobre una superficie vertical

Una ventana circular para observación en un buque tiene un radio de 1 pie, y el centro de la ventana está a 8 pies de distancia del nivel del agua **¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la ventana?**

Para **aprovechar la simetría**, se localiza un sistema de coordenadas tal que el **origen coincida con el centro de la ventana** → la **profundidad en *y*** es entonces:

$$\boxed{\text{Profundidad} = h(y) = 8 - y}$$

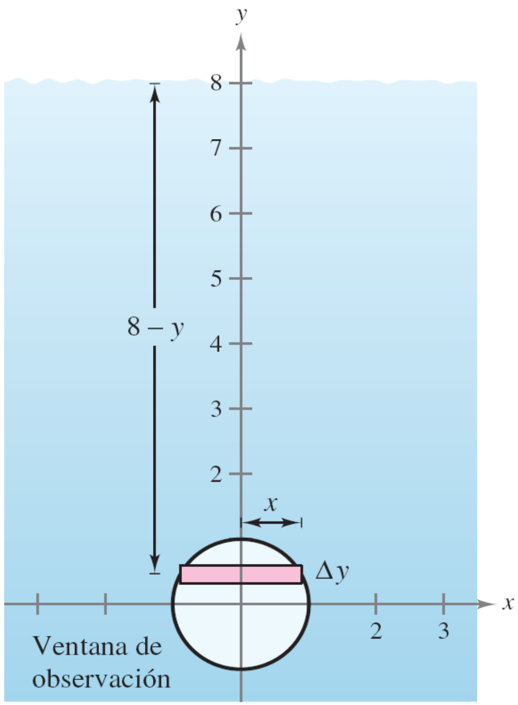
La **longitud** horizontal de la ventana es $2x$, y se puede usar la ecuación para el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y resolver para x:

$$\boxed{\text{Longitud} = 2x = 2\sqrt{1 - y^2} = L(y)}$$

Finalmente, se tiene que:

$$F = w\int_c^d h(y)L(y)\,dy = 64\int_{-1}^{1}(8 - y)(2)\sqrt{1 - y^2}\,dy$$

$$F = 64(16)\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - y^2}\,dy - 64(2)\int_{-1}^{1}y\sqrt{1 - y^2}\,dy = 512\pi \text{ libras}$$



Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Escribir la **solución general de una ecuación diferencial**
- Usar la **notación de la integral indefinida** para las **antiderivadas o primitivas**
- Utilizar las **reglas de la integración básicas** para encontrar antiderivadas
- Encontrar **una solución particular de una ecuación diferencial**
- Emplear la **notación sigma** para escribir y calcular una suma
- Entender el **concepto de área**
- Aproximar **el área de una región plana**
- Determinar el *área de una región plana usando límites*
- Entender la definición de una **suma de Riemann**
- Hallar una **integral definida utilizando límites**
- Calcular una **integral definida utilizando las propiedades de las integrales definidas**
- Evaluar una **integral definida utilizando el teorema fundamental del cálculo**
- Entender y utilizar el **teorema del valor medio** para integrales
- Encontrar el **valor medio de una función sobre un intervalo cerrado**

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Entender y utilizar el **segundo teorema fundamental del cálculo**
- Entender y utilizar el **teorema del cambio neto**
- Utilizar el **reconocimiento de patrones** para encontrar una integral definida
- Emplear un **cambio de variable** para determinar una integral definida
- Utilizar la **regla general de las potencias** para la integración con el fin de determinar una integral definida
- Calcular la **integral definida que incluya una función par o impar**
- **Integrar** las principales **funciones trascendentes**
- Utilizar los procedimientos adecuados **para adaptar integrandos a las reglas básicas de integración**
- Encontrar una **antiderivada o primitiva usando la integración por partes**
- Resolver **integrales trigonométricas** que contengan **potencias de seno y coseno**, **potencias de secante y tangente o productos de seno-coseno con ángulos diferentes**
- Usar **sustituciones trigonométricas** para resolver una integral

Resumen III

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Usar las integrales resueltas a partir de **sustituciones trigonométricas** para **formular y resolver aplicaciones de la vida real**
- Entender el concepto de una **descomposición en fracciones simples o parciales**
- Usar la **descomposición en fracciones simples** con los **factores lineales** para i**ntegrar las funciones racionales**
- Usar la **descomposición de fracciones simples** con los **factores cuadráticos** para **integrar las funciones racionales**
- Evaluar una integral indefinida usando una **tabla de integrales** y usando **fórmulas de reducción**
- Evaluar una **integral indefinida que involucra funciones racionales de seno y coseno**
- Reconocer **los límites que producen las formas indeterminadas**
- Aplicar la **regla de L'Hôpital para evaluar un límite**
- Evaluar una **integral impropia que tiene un límite de integración infinito**
- Evaluar **una integral impropia que tiene una discontinuidad infinita**

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Encontrar el **área de una región entre curvas que se intersecan** usando **integración**
- Describir la **integración como un proceso de acumulación**
- Encontrar el **volumen de un sólido de revolución** usando el **método de los discos** y de un **sólido de revolución hueco** usando el **método de las arandelas**
- Encontrar el **volumen de un sólido con las secciones transversales conocidas** a partir de una **generalización del método de los discos**
- Encontrar el **volumen de un sólido de revolución** mediante el **método de las capas**
- **Comparar** los usos del **método de los discos y el método de las capas**
- Encontrar la **longitud del arco de una curva suave**
- Encontrar el **área de una superficie de revolución**
- Encontrar el **trabajo realizado por una fuerza constante y por una fuerza variable**
- Entender la **definición de masa**
- Encontrar el **centro de masa en un sistema unidimensional y en un sistema bidimensional**

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Localizar el **centro de masa en una lámina plana**
- Usar el **teorema de Pappus para encontrar el volumen de un sólido de revolución**
- Encontrar la **presión y la fuerza de un fluido**